Boniface Mbih
CREM UMR CNRS 6211, Université de Caen Normandie, 14032 Caen, France

Aristide Valeu
Enseignant vacataire à l'université de Nanterre Paris X

Auteur correspondant: Boniface Mbih, boniface.mbih@unicaen.fr

LA VULNÉRABILITÉ DE LA RÈGLE DE LA MAJORITÉ AUX PARADOXES D'ANSCOMBE ET D'OSTROGORSKI : UNE ANALYSE COMPARATIVE

Résumé : L'objectif de cet article est d'examiner les circonstances dans lesquelles les paradoxes d'Anscombe et d'Ostrogorski sont susceptibles de se produire lorsque les individus expriment des votes dichotomiques, c'est-à-dire lorsque le suffrage exprimé prend la forme oui/non. Nos résultats principaux apportent une réponse au problème de la fréquence de ces paradoxes, à la fois en fonction du nombre de votants et du nombre de motions (ou de projets) sur lesquels les individus sont appelés à s'exprimer. Ces résultats sont obtenus dans le cadre de deux modèles probabilistes classiques en théorie du choix social, à savoir les hypothèses de culture impartiale que nous noterons IC (impartial culture) et de culture impartiale anonyme , que nous noterons IAC (impartial anonymous culture). Plus précisément, dans le cas de trois motions, nous calculons la probabilité exacte qu'une configuration de votes individuels – un état de l'opinion – conduise à l'un ou l'autre de ces deux paradoxes ; et dans le cas de plus de trois motions, nous utilisons des simulations, à l'aide de la technique de Monte Carlo, pour obtenir des estimations de la fréquence de ces paradoxes.

Mots-clés : paradoxe d'Anscombe, paradoxe d'Ostrogorski, culture impartiale, culture impartiale anonyme, simulations.

JEL Classification : D71.

THE VULNERABILITY OF MAJORITY RULE TO ANSCOMBE'S AND OSTROGORKSKI'S PARADOXES : A COMPARATIVE ANALYSIS

Abstract : The aim of this paper is to study the circumstances at which the Anscombe and Ostrogorski paradoxes are susceptible to arise when individual votes are dichotomous, that is, in the context of yes-no voting. Our main results provide an answer to the question of the likelihood of those paradoxes under two classical probabilistic models: the impartial culture (IC) and the impartial anonymous culture (IAC) assumptions. More precisely, we determine the exact frequencies of occurrence of these phenomena in the three-issue case, under simple majority rule; we also provide estimates – obtained by means of the Monte Carlo technique – for more than three issues.

Keywords : Anscombe's paradox, Ostrogorski's paradox, impartial culture, impartial anonymous culture, simulations.

Introduction

Deux phénomènes de vote, connus sous les noms respectifs de paradoxe d'Anscombe (Anscombe 1976) et de paradoxe d'Ostrogorski (Ostrogorski 1902), sont parfois considérés comme identiques, sinon étroitement liés, bien qu'ils se produisent dans des contextes quelque peu distincts. D'une part, le paradoxe d'Anscombe est susceptible d'apparaître dans des votes majoritaires successifs, et correspond à l'illustration suivante, donnée par Dummett (1984, chap. 1) :

« Suppose that the composition of a committee is fixed for a certain period, during which it has to take a number of decisions. The following proposition, at first glance surprising, belongs to the dynamic theory of voting: a majority of the committee members may be in the minority on a majority of occasions ».[1]

D'autre part, le paradoxe d'Ostrogorski se produit dans le contexte du vote préférentiel lorsque les électeurs sont appelés à classer des options (et en particulier des programmes politiques) incluant plusieurs dimensions. On fait alors habituellement l'hypothèse que chaque électeur décide de la nature de son vote (« oui » ou « non ») selon le nombre de dimensions avec lesquelles il est en accord, ainsi que le résume Nurmi (1999) :

« The essence of Ostrogorski's paradox is the observation that the following two procedures may lead to different outcomes:

- Each voter votes for the party whose stand is closer to his in a majority of electoral issues. The winner is the party commanding support of the majority of voters.
- For each issue the winner is the party whose stand is supported by a majority of voters. The winner of the election is the party that wins on a majority of issues».[2]

[1] « Supposons que la composition d'une commission soit fixée pendant une certaine période, au cours de laquelle elle doit prendre un certain nombre de décisions. La proposition suivante, surprenante à première vue, relève de la théorie dynamique du vote : une majorité des membres de la commission peut se trouver en minorité dans une majorité d'occasions ».

[2] « L'essence du paradoxe d'Ostrogorski reside dans l'observation que les deux procédures suivantes peuvent conduire à des résultats differents :

- Chaque électeur vote pour le parti dont la position est la plus proche de la sienne dans la majorité des sujets de l'élection. Le vainqueur est le parti qui dispose du soutien de la majorité des électeurs.

On peut noter que de nombreux débats ont porté sur la distinction entre ces deux phénomènes. Par exemple, pour Bezembinder et Van Acker (1985), les deux paradoxes sont en essence identiques. Il apparaît cependant que, bien que similaires en apparence, les paradoxes d'Ostrogorski et d'Anscombe ne sont pas équivalents, ainsi que l'ont montré Nurmi et Meskanen (1997). Pour des contributions plus récentes sur cette littérature, on pourra consulter Nurmi et Saari (2010) ou Laffond et Lainé (2009, 2011).

L'objectif de cet article est de mettre en relief la différence entre ces deux paradoxes. Nous présentons quelques-unes de leurs caractéristiques spécifiques, et nous évaluons ensuite quantitativement la possibilité d'occurrence de chacun des paradoxes. En d'autres termes, étant donné le nombre de sujets, de projets ou de motions (nous utiliserons indifféremment ces termes dans la suite, selon que l'un ou l'autre sera plus commode) sur lesquels porte le vote, nous calculons la fréquence de ces phénomènes, par rapport à l'ensemble des configurations de vote. Une analyse de ce type est menée par Kelly (1989) pour le paradoxe d'Ostrogorski, mais cette analyse est limitée au cas de trois motions, et s'appuie sur des simulations informatiques. Nous présentons ici des résultats qui reposent sur une approche analytique pour le cas de trois motions et pour le cas de plus de trois motions, nous procédons soit à une énumération exhaustive, par ordinateur, de tous les cas conduisant aux paradoxes, soit à des simulations de Monte-Carlo. Notre analyse est effectuée dans le cadre de deux modèles habituels en théorie du choix social dans l'évaluation de la fréquence des paradoxes ou des anomalies du vote, à savoir les hypothèses de culture impartiale et de culture impartiale anonyme (des précisions sur ces modèles sont fournies dans la section 3 de ce travail).

La suite de cet article s'organise de la façon suivante : la section 2 introduit la notation et présente quelques remarques préliminaires sur les deux paradoxes ; les résultats sur la fréquence des paradoxes sont donnés dans la section 3 ; la dernière section conclut l'article.

1. Quelques éléments sur la structure des deux paradoxes

Soit un ensemble fini $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de *n individus* ou *votants* à qui on demande d'exprimer leur opinion sur un ensemble fini de m motions, sujets ou projets, où m est un entier supérieur ou égal à 3. Etant donné une motion k, chaque individu $i \in N$ exprime un vote $v_k^i \in \{-1,1\}$ selon qu'il accepte ($v_k^i = 1$) ou rejette ($v_k^i = -1$) la motion k. Tout n –uple $v_k^N = \left(v_k^1, \ldots, v_k^n\right)$ sera appelé *profil de votes individuels*

– Pour chaque point de la plate-forme le vainqueur est le parti dont la position a le soutien d'une majorité d'électeurs. Le vainqueur de l'élection est le parti qui l'emporte sur une majorité de sujets ».

sur la motion k. Chaque profil de ce type indique le vote de chaque individu sur la motion en question.

La *règle de la majorité sur la motion k* est l'application f qui, à chaque profil de votes individuels possible sur une motion k, associe une décision collective $f\left(v_k^1,\ldots,v_k^n\right)$ telle que $f\left(v_k^1,\ldots,v_k^n\right)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} v_k^i > 0 \\ -1 & \text{autrement.}\end{cases}$

En d'autres termes, étant donné un profil de votes individuels v_k^N sur la motion k, la somme $\sum_{i=1}^{n} v_k^i$ est la différence entre le nombre total de votes en faveur de la motion et le nombre total de votes contre la motion. $\sum_{i=1}^{n} v_k^i > 0$ signifie que le nombre de votes « pour » est supérieur au nombre de votes « contre » : la motion k n'est donc acceptée que si elle réunit en sa faveur plus de la moitié du nombre de votants. Cela signifie aussi qu'en cas d'égalité de voix pour et contre la motion, la motion est rejetée.

Si nous prenons maintenant en considération toutes les motions possibles, chaque individu i exprime un vecteur de votes $v^i = \left(v_1^i,\ldots,v_m^i\right)$ c'est-à-dire un vecteur de votes à m composantes, avec un et un seul vote pour chaque motion. Dans ces conditions, un *profil de vecteur de* (ou plus simplement un *profil* lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté) est un vecteur à $n \times m$ composantes, $v^N = \left(v_1^1,\ldots,v_m^1,\ldots,v_1^n,\ldots,v_m^n\right)$ dans lequel chaque individu exprime un vecteur de votes à m composantes, avec un vote par motion.

Dans le contexte ainsi défini, la *règle de votes successifs à la majorité* apparaît comme une application qui à chaque profil v^N associe un vecteur unique de décisions collectives à m composantes, chaque composante correspondant à la décision prise pour une motion. Il faut noter que les votes successifs ainsi définis sont indépendants les uns des autres, en ce sens que les votes exprimés pour un projet n'affectent *a priori* en rien les votes sur les autres motions.

Par ailleurs, en nous plaçant dans le contexte où les individus sont appelés à s'exprimer sur une plate-forme (ou un programme) électorale ayant plusieurs dimensions (la santé, l'éducation, l'économie, la sécurité, etc.), nous admettrons par souci de simplicité (hypothèse habituelle dans la littérature) que les individus accordent un poids égal à chaque dimension, et ferons ici l'hypothèse que chaque votant utilise le principe de la majorité pour déterminer son vote sur la plate-forme; en d'autres termes, un votant accepte une plate-forme si parmi les projets contenus dans cette plate-forme le nombre de ceux avec lesquels il est en accord (il voterait alors « oui » sur ces projets) est supérieur au nombre de ceux avec lesquels il est en désaccord ; cela revient à dire qu'il vote pour une plate-forme si le nombre de 1 est supérieur au nombre de −1 ; et symétriquement, lorsque le nombre de est supérieur au nombre de 1, on considère que le votant rejette la plate-forme.

Nous allons maintenant donner une illustration des deux paradoxes. Nous commençons par le paradoxe d'Anscombe.

2.1. Le paradoxe d'Anscombe

Supposons que le vote ait déjà eu lieu. On dira qu'un votant est « *frustré* » (Anscombe 1976) sur une motion si son vote est en désaccord avec la décision collective prise sur cette motion. Le votant en question se trouve donc dans la minorité sur cette motion. Mais le paradoxe d'Anscombe illustre précisément le phénomène suivant : bien que toutes les décisions collectives sur chacune des motions aient été prises en s'appuyant sur le principe de la majorité, il peut arriver qu'une majorité de votants se retrouve en minorité dans une majorité de votes. Une façon plus formelle de décrire ce phénomène consiste à dire que étant donné le nombre m de motions, le paradoxe d'Anscombe se produit en un profil de vecteurs de votes individuels à m composantes si le nombre de votants frustrés sur plus de $\frac{m}{2}$ motions est strictement supérieur à $\frac{n}{2}$.

Exemple 1. Supposons $N = \{1,2,3,4,5\}$ et $A = \{a_1,a_2,a_3\}$. Admettons que les votes soient répartis de la façon suivante :

Motions	Votant 1	Votant 2	Votant 3	Votant 4	Votant 5	Décision collective
a_1	1	−1	−1	1	1	1
a_2	1	−1	1	−1	−1	−1
a_3	−1	−1	1	1	1	1
Nombre de désaccords	2	2	2	0	0	

En dessous de chaque votant, est indiqué le vote de cet individu sur les différentes motions. La dernière ligne résume pour chaque votant le nombre de désaccords avec les décisions collectives. L'exemple montre que les votants 1, 2 et 3 sont en désaccord deux fois sur trois avec la décision collective, ils sont donc frustrés deux fois sur trois, c'est-à-dire sur une majorité de votes. Intéressons-nous maintenant au paradoxe d'Ostrogorski.

2.2. Le paradoxe d'Ostrogorski

Supposons de nouveau que le vote ait déjà eu lieu sur toutes les motions et plaçons-nous du point de vue de membres d'un électorat (une circonscription, une commission ou une communauté quelconque) qui votent sur une plate-forme électorale possédant plusieurs dimensions. Ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, un votant accepte de voter pour le programme s'il est en accord avec la majorité des projets de la plate-forme ; sinon, il vote contre. On applique le même principe aux décisions collectives obtenues lorsque les individus votent sur chacun des projets de la plate-forme. On compare alors les résultats des deux mécanismes suivants : (1) la plate-forme est considérée comme collectivement acceptée si le nombre de projets collectivement acceptés est supérieur au nombre de projets collectivement rejetés (sinon la plate-forme est rejetée), et (2) la plate-forme est collectivement acceptée si le nombre d'individus qui l'acceptent est supérieur au nombre de ceux qui la rejettent (sinon elle est considére comme collectivement rejetée).

Le paradoxe d'Ostrogorski apparaît alors chaque fois que les résultats de ces deux mécanismes sont différents. Plus précisément, le paradoxe d'Ostrogorski se produit en un profil de vecteurs de votes individuels lorsque (1) une majorité de votants acceptent la plate-forme alors qu'une majorité de projets de la plate-forme est rejetée par une majorité de votants, ou (2) une majorité de votants rejettent la plate-forme alors qu'une majorité de projets de la plate-forme est acceptée par une majorité de votants.

Exemple 2. Soit $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Admettons que les votes soient répartis de la façon suivante :

Motions	Votant 1	Votant 2	Votant 3	Votant 4	Votant 5	Décision collective
a_1	1	–1	–1	–1	1	–1
a_2	–1	1	–1	1	1	1
a_3	–1	–1	1	1	1	1
Vote sur la plate-forme	–1	–1	–1	1	1	?

La dernière ligne du tableau indique la décision du votant sur la plate-forme (a_1,a_2,a_3). Une majorité de projets de cette plate-forme (a_2 et a_3) est collectivement acceptée, mais une majorité de votants (les votants 1, 2 et 3) a voté pour le rejet de la plate-forme. Le point d'interrogation au sud-est du tableau exprime l'idée que selon la logique « verticale » la plate-forme devrait être acceptée (1), mais suivant la logique « horizontale » elle devrait être rejetée (–1) : les deux logiques sont donc en contradiction, d'où le paradoxe.

2.3. Quelques remarques sur ces paradoxes

Commençons par noter que dans l'Exemple 1 on a une illustration du paradoxe d'Anscombe, mais cet exemple n'est pas un cas de paradoxe d'Ostrogorski ; et à l'inverse l'Exemple 2 présente un cas de paradoxe d'Ostrogorski, qui n'est pas un cas de paradoxe d'Anscombe. Cela montre qu'il n'existe pas de relation d'inclusion entre les profils conduisant à ces deux paradoxes.

Supposons maintenant que nous ayons un nombre impair de projets dans une plate-forme électorale, comme dans les exemples ci-dessus. Il est alors clair que dans le cas où tous les projets sont acceptés un votant peut se retrouver en minorité seulement s'il rejette plus de la moitié de ces projets ; mais dans ce cas, cela signifie aussi qu'il rejette la plate-forme. Et si des votants qui se trouvent dans cette situation forment une majorité, on a alors les paradoxes d'Anscombe et d'Ostrogorski simultanément. Le même raisonnement est valide lorsque tous les projets de la plate-forme sont collectivement rejetés (la colonne des décisions collectives est alors exclusivement constituée de –1). En revanche, les conclusions ci-dessus ne sont pas nécessairement vraies dans le cas où le nombre de projets de la plate-forme est pair ; les votants peuvent en effet avoir un nombre égal de 1 et de –1 : on ne peut donc conclure, pour ces votants, ni à une acceptation ni à un rejet de la plate-forme. A partir du raisonnement ci-dessus, on peut conclure que :

Assertion 1. *Lorsque le nombre de points de la plate-forme est impair et que la décision collective se traduit par le rejet ou l'acceptation de tous les projets, alors les profils de votes conduisent au paradoxe d'Anscombe si et seulement s'ils conduisent au paradoxe d'Ostrogorski.*

Les Exemples 1 et 2 ont bien montré que les deux paradoxes étaient indépendants. L'Assertion 1 et le raisonnement qui a conduit à son énoncé montrent que dans certains cas, on peut avoir les deux paradoxes simultanément. En effet l'Assertion 1 explique que, lors d'une séance d'une commission quelconque où les décisions se prennent à la majorité des voix sur chaque point de l'ordre du jour, du moment que le nombre de points de l'ordre du jour est impair, et si ces points sont soit tous acceptés soit tous rejetés, on aura un paradoxe d'Anscombe chaque fois qu'on aura on paradoxe d'Ostrogorski, et réciproquement.

Pour autant, même dans ce cas, l'équivalence n'est pas totale. En effet, lorsque le nombre de votants est impair, l'évolution de ces paradoxes est différente à la suite de modifications du vecteur de décisions collectives. Par exemple et sans perte de généralité, lorsqu'un paradoxe d'Anscombe survient avec le vecteur de décisions collectives (1, 1, 1), les votants en minorité sont ceux qui expriment les votes (1, –1, –1), (1, 1, –1), (1,–1, 1) ou (1, –1,–1). Et si le vecteur de décisions collectives passe à (1, 1, –1) alors l'ensemble des votants en minorité se transforme en l'ensemble de ceux qui expriment les votes (1, –1, 1), (–1, 1, 1), (–1, –1, 1) ou (–1, –1, –1). En revanche, avec ce même changement dans le vecteur de décisions collectives, l'ensemble des votants acceptant la plate-forme et celui de ceux qui la rejettent restent identiques ; ainsi, les modifications parallèles observées dans le cas du paradoxe d'Anscombe sont absentes dans le cas du paradoxe d'Ostrogorski.

Il est alors clair que :

Assertion 2. *Lorsque le nombre de votants et le nombre de motions sont impairs, le nombre d'occurrences du paradoxe d'Anscombe est le même pour tous les vecteurs de décisions collectives possibles.*

Et finalement, à partir des éléments présentés ci-dessus, il s'ensuit que :

Assertion 3. *Lorsque le nombre de votants et le nombre de motions sont tous les deux impairs, le nombre d'occurrences du paradoxe d'Ostrogorski est le même lorsque toutes les motions sont collectivement acceptées, et lorsqu'elles sont toutes collectivement rejetées.*

Il convient, avant de clore cette section, de noter ainsi que l'indiquent les commentaires ci-dessus que le paradoxe d'Anscombe présente davantage de symétrie par rapport aux décisions collectives que le paradoxe d'Ostrogorski. Dans la section suivante, nous apportons une réponse à une question de nature plus quantitative : ces paradoxes sont-ils fréquents et lequel des deux est le plus susceptible de se produire ?

3. La probabilité des paradoxes

Nous allons maintenant mettre en relief la différence entre les deux paradoxes, en évaluant la proportion de profils auxquels les paradoxes d'Anscombe et d'Ostrogorski surviennent, respectivement. Cette évaluation repose sur les modèles de culture impartiale (IC) et de culture impartiale anonyme (IAC). Schématiquement, la culture impartiale fait l'hypothèse (a) d'une distribution uniforme sur l'ensemble des vecteurs de votes individuels et (b) de l'équiprobabilité de tous les profils de vecteurs de votes; alors que la culture impartiale anonyme (i) considère deux profils comme indiscernables chaque fois que le nombre de personnes qui expriment chaque vecteur de votes à m composantes est le même dans les deux profils, et (ii) tous les profils ainsi définis sont équiprobables. Intuitivement, dans le cas de la culture impartiale, on parle simplement de profils (tels que nous les avons définis dans la section précédente), et dans le cas de la culture impartiale anonyme on parle de profils anonymes : dans le premier cas, l'identité des individus est prise en compte (qui vote comment) et dans le second cas seul compte le nombre de personnes ayant voté d'une certaine manière (et peu importe qui a voté comment). Dans le cadre de chacun de ces deux modèles, nous calculons la fréquence des paradoxes, c'est-à-dire le rapport entre d'une part le nombre de profils auxquels le paradoxe se produit, et d'autre part le nombre total de profils.

Dans un article récent, Gehrlein et Lepelley (2012) insistent sur le fait que les modèles IAC et IC "still do add very significant value to research on the probability that various paradoxical election outcomes might be observed"[3] ; pour une présentation détaillée de ces modèles on pourra se reporter à Regenwetter et al. (2006).

Les résultats en IC (pour le cas de trois motions) sont fournis dans le tableau 1 de l'Appendice ; ils ont été obtenus par une énumération complète sur ordinateur de tous les cas. Nous accordons une attention particulière au modèle IAC. C'est un modèle très largement utilisé dans la littérature (voir par exemple Gehrlein et Fishburn 1976; Lepelley, Louichi et Smaoui 2008; Mbih, Moyouwou et Picot 2010, parmi d'autres auteurs) notamment en raison de sa souplesse dans l'obtention de résultats analytiques : il est possible, avec ce modèle, d'obtenir des formules analytiques donnant la fréquence de chaque paradoxe en fonction du nombre de votants.

Notons qu'avec trois motions on a au total huit vecteurs de votes possibles :

$v_1 = (1, 1, 1)$	$v_2 = (1, 1, -1)$	$v_3 = (1, -1, 1)$	$v_4 = (1, -1, -1)$
$v_5 = (-1, 1, 1)$	$v_6 = (-1, 1, -1)$	$v_7 = (-1, -1, 1)$	$v_8 = (-1, -1, -1)$

Notons maintenant le nombre total de votants dont le vecteur de votes est v_k, k variant de 1 à 8. Chaque profil $\left(v_1^1,\ldots,v_m^1,\ldots,v_1^n,\ldots,v_m^n\right)$ peut alors s'écrire à l'aide des termes n_k sous la forme d'un 8–uple $\left(n_1,n_2,n_3\ ,n_4,n_5\ ,n_6\ ,n_7,n_8\right)$ d'entiers non négatifs n_k tels que $\sum_{k=1}^{k=8} n_k = n$. C'est ce qu'on appelle un *profil anonyme* (puisque seul y apparaît désormais le nombre d'individus exprimant tel ou tel vecteur de votes, et non plus l'identité des votants).

Afin d'évaluer la probabilité (ou la fréquence) de chaque paradoxe, nous commençons par caractériser les profils anonymes où le paradoxe se produit, en termes d'un ensemble d'inéquations linéaires dans lesquelles les $n_k (k = 1, \ldots, 8)$ sont les variables. Chaque système d'inéquations décrit un polyèdre et le nombre de profils anonymes recherché s'obtient comme le nombre de solutions du système d'inéquations correspondant. A l'aide de techniques dont l'origine en théorie du choix social remonte aux travaux de Gehrlein et Fishburn (1976), mais en nous appuyant plus spécifiquement sur des travaux plus récents sur les polynômes d'Ehrhart (voir par exemple Gehrlein (2006) ou Lepelley, Louichi et Smaoui (2008)), nous obtenons des formules donnant le nombre exact de profils anonymes conduisant aux différents paradoxes. L'ensemble de la procédure de calcul a été écrit sous la forme d'un programme informatique (disponible auprès

[3] […] « ajoutent encore une valeur très significative à la recherche sur la probabilité que des résultats électoraux paradoxaux peuvent être observés ».

des auteurs sur simple demande). La probabilité (ou la fréquence) recherchée est ensuite obtenue comme le rapport du nombre de cas favorables, sur le nombre de cas possibles :

$$\frac{\text{nombre total de profils anonymes auxquels le paradoxe se produit}}{\text{nombre total de profils anonymes}}.$$

Ce rapport sera par la suite appelé *vulnérabilité* de la règle de la majorité au paradoxe concerné ; il sera calculé en fonction du nombre n de votants et sera noté $vul_A(n)$ pour le paradoxe d'Anscombe et $vul_O(n)$ pour le paradoxe d'Ostrogorski. Il faut noter que le nombre total de profils anonymes est égal au nombre d'arrangements avec répétition de huit nombres entiers non négatifs – les huit vecteurs de votes v_k,$(k = 1 ,\ldots, 8)$ présentés ci-dessus – dont la somme est égale à n ; Ce nombre est donné par la formule :

$$\binom{n+7}{7} = \frac{1}{5040}(n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1). \qquad (1)$$

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, nous donnons aussi les fréquences exactes sous l'hypothèse de culture impartiale ; ces dernières ont été obtenues par une énumération complète sur ordinateur.

Dans les sous-sections ci-dessous, nous commençons par examiner le cas de trois motions, pour lequel nous donnons les fréquences exactes, d'abord pour le paradoxe d'Anscombe (sous-section 3.1), puis pour le paradoxe d'Ostrogorski (sous-section 3.2), et enfin nous nous intéressons aux profils où les deux paradoxes se produisent simultanément (sous-section 3.3). Nous nous intéresserons ensuite au cas général (sous-section 3.4), en permettant à la fois au nombre de votants et au nombre de motions d'augmenter ; dans ce contexte plus général, en l'absence de méthodes analytiques connues des théoriciens du choix social, nous fournissons des estimations des fréquences, obtenues à l'aide de simulations informatiques.

3.1. La fréquence du paradoxe d'Anscombe

Nous subdivisons l'ensemble des profils anonymes selon les vecteurs de décisions collectives. Par exemple, lorsque le vecteur de décisions collectives est (1, 1, 1), le paradoxe d'Anscombe se produit si et seulement si le nombre total de votants qui expriment les vecteurs de votes (1, –1, –1), (–1, 1, –1), (–1, –1, 1), (–1, –1, –1) est supérieur à la moitié du nombre total de votants.

Donc, avec le vecteur de décisions collectives (1, 1, 1), le paradoxe d'Anscombe se produit si et seulement si le système d'inéquations suivant est valide :

$$\begin{cases} a_1 \text{ est acceptée} \\ a_2 \text{ est acceptée} \\ a_3 \text{ est acceptée} \\ \quad Mm \\ \sum_{k=1}^{k=8} n_k = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1+n_2+n_3+n_4-n_5-n_6-n_7-n_8>0 \\ n_1+n_2-n_3-n_4+n_5+n_6-n_7-n_8>0 \\ n_1-n_2+n_3-n_4+n_5-n_6+n_7-n_8>0 \\ -n_1-n_2-n_3+n_4-n_5+n_6+n_7+n_8>0 \\ n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8=n \end{cases}$$

où Mm signifie majorité de votants en minorité.

Ce système d'inéquations caractérise l'ensemble des profils anonymes pour lesquels le paradoxe d'Anscombe se produit. Nous effectuons ensuite le même type d'analyse pour chacun des vecteurs de décisions collectives possible. Tous les ensembles ainsi caractérisés sont nécessairement disjoints, puisque les vecteurs de décisions collectives correspondants sont tous deux à deux mutuellement exclusifs. Nous obtenons donc, après avoir calculé le nombre total de profils anonymes satisfaisant à chaque ensemble de contraintes et avoir cumulé par addition tous ces résultats, le nombre total de profils anonymes conduisant au paradoxe. Rappelons, ainsi que nous l'avons mentionné dans l'Assertion 2, que lorsque le nombre de votants est impair, le nombre de profils (anonymes ou non) conduisant au paradoxe d'Anscombe est le même pour tous les vecteurs de décisions collectives. La recherche du nombre de solutions de chaque système d'inéquations permet alors d'obtenir les polynômes périodiques (caractéristique des polynômes d'Ehrhart) suivants :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{(n-1)(n+3)(n+7)(n+11)\left(n^3+8n^2-11n-60\right)}{1\,290\,240} & \text{si} \quad n \equiv 1 \bmod 4 \\ \dfrac{(n-3)(n+1)(n+5)(n+9)\left(n^3+16n^2+53n-28\right)}{1\,290\,240} & \text{si} \quad n \equiv 3 \bmod 4 \end{array} \tag{2}$$

En multipliant chacune des formules ci-dessus par 8 (le nombre de vecteurs de décisions collectives) on obtient le nombre total de profils de votes anonymes conduisant au paradoxe d'Anscombe lorsque le nombre de votants est impair.

Après avoir effectué le même type de calculs pour le cas n pair et avoir calculé le divisé le nombre total de profils anonymes « pathologiques » (ceux qui conduisent au paradoxe) par le nombre total de profils anonymes de la formule (1), nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 1. Lorsque $m = 3$ et $n \geq 4$, la vulnérabilité de la règle de la majorité au paradoxe d'Anscombe est donnée par :

$$vul_A(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{32}\dfrac{n(n-2)(n^2+4n+10)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si} \quad n\equiv 0 \bmod 4\\ \dfrac{1}{32}\dfrac{(n-1)(n+11)(n^3+8n^2-11n-60)}{(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)(n+6)} & \text{si} \quad n\equiv 1 \bmod 4\\ \dfrac{1}{32}\dfrac{n(n-2)(n^2+4n+10)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si} \quad n\equiv 2 \bmod 4\\ \dfrac{1}{32}\dfrac{(n-3)(n+9)(n^3+16n^2+53n-28)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+6)(n+7)} & \text{si} \quad n\equiv 3 \bmod 4\end{cases} \tag{3}$$

Rappelons que $n \equiv 1 \bmod 4$ signifie que le reste de la division de n par 4 est 1. Pour chaque taille n possible de l'électorat, $vul_A(_n)$ donne la fréquence exacte de l'occurrence du paradoxe d'Anscombe pour trois motions. Les résultats numériques correspondants sont disponibles dans le tableau 2 de l'Appendice. Lorsque la valeur de n s'accroît, la probabilité d'avoir un paradoxe d'Anscombe augmente, aussi bien pour les valeurs paires que pour les valeurs impaires de n. Ce résultat reste évidemment vrai pour les fréquences obtenues sous le modèle IC, ainsi que le montre le tableau 1. Sous l'hypothèse IAC, au fur et à mesure que le nombre de votants tend vers l'infini, la probabilité du paradoxe tend vers 3,125 %. Ces fréquences, assez faibles, montrent que le paradoxe peut être considéré comme plutôt rare.

Nous souhaitons noter que la validité de toutes nos formules a été testée par une énumération complète par ordinateur pour de petites valeurs de n.

3.2. La fréquence du paradoxe d'Ostrogorski

Comme pour le paradoxe d'Anscombe, nous caractérisons d'abord les profils anonymes auxquels le paradoxe d'Ostrogorski se produit, pour chaque vecteur de décisions collectives possible. Par exemple, lorsque le vecteur de décisions collectives (–1, 1, 1), une majorité de motions, ici a_2 et a_3, est adoptée. Le paradoxe d'Ostrogorski se produit alors si et seulement si la coalition des votants qui expriment les votes (1, –1, –1), (–1, 1, –1), (–1, –1, 1), et (–1, –1, –1) forme une majorité, puisque la « logique horizontale » (la plate-forme doit être rejetée) se retrouve alors en contradiction avec la « logique verticale » du vecteur collectif (–1, 1, 1), selon lequel la plate-forme doit être acceptée. Le paradoxe d'Ostrogorski se produit alors si et seulement si le système d'inéquations suivant est valide:

$$\begin{cases} a_1 \text{ est rejetée} \\ a_2 \text{ est acceptée} \\ a_3 \text{ est acceptée} \\ \quad Condition\,O \\ \quad \sum_{k=1}^{k=8} n_k = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n_1 - n_2 - n_3 - n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 > 0 \\ n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_5 + n_6 - n_7 - n_8 > 0 \\ n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 + n_7 - n_8 > 0 \\ -n_1 - n_2 - n_3 + n_4 - n_5 + n_6 + n_7 + n_8 > 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 = n \end{cases}$$

où la condition O signifie que le paradoxe d'Ostrogorski est présent.

On écrit de la même manière les sept autres systèmes d'inéquations, correspondant à chacun des autres vecteurs de décisions collectives possibles. Des calculs similaires à ceux effectués pour le paradoxe d'Anscombe permettent d'arriver à la proposition suivante :

Proposition 2. Lorsque $m = 3$ et $n \geq 2$, la vulnérabilité de la règle de la majorité au paradoxe d'Ostrogorski est donnée par :

$$vul_O(n) = \begin{cases} \frac{1}{64}\frac{n(11n^3+106n^2+400n+1208)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si} \quad n \equiv 0 \bmod 4 \\ \frac{1}{64}\frac{(n-1)(11n^4+209n^3+1351n^2+3553n+2820)}{(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)(n+6)} & \text{si} \quad n \equiv 1 \bmod 4 \\ \frac{1}{64}\frac{n(11n^3+106n^2+400n+1208)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si} \quad n \equiv 2 \bmod 4 \\ \frac{1}{64}\frac{n(11n^3+106n^2+400n+1208)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si} \quad n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \quad (4)$$

La Proposition 2 montre que le paradoxe d'Ostrogorski est susceptible de se produire dès qu'on a au mois deux individus dans l'électorat. Des valeurs numériques sont données dans le tableau 2. Lorsque la taille n de l'électorat s'accroît, la probabilité d'obtenir un paradoxe d'Ostrogorski s'accroît, et tend vers 17,1875 % lorsque n tend vers l'infini.

Dans la sous-section suivante, nous calculons la probabilité que les deux paradoxes se produisent en même temps. Nous appelons les profils concernés par cette situation des profils de double paradoxe.

3.3. La vulnérabilité de la règle de la majorité au double paradoxe

Ces profils sont caractérisés par la combinaison des inéquations décrivant les deux paradoxes. Le lecteur peut facilement vérifier qu'en dehors des profils pour lesquels tous les points de la plate-forme sont soit tous acceptés soit tous rejetés, les systèmes d'inéquations conduisant aux deux paradoxes sont distincts.

En appliquant la même méthode que ci-dessus, nous obtenons la proposition ci-dessous :

$$vul_{AO}(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{128}\dfrac{n(n-2)\left(n^2+4n+136\right)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si } \; n\equiv 0 \bmod 4\\[2ex] \dfrac{1}{128}\dfrac{(n-1)(n+11)\left(n^3+8n^2-11n-60\right)}{(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)(n+6)} & \text{si } \; n\equiv 1 \bmod 4\\[2ex] \dfrac{1}{128}\dfrac{n(n-2)\left(n^2+4n+136\right)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} & \text{si } \; n\equiv 2 \bmod 4\\[2ex] \dfrac{1}{128}\dfrac{(n-3)(n+9)\left(n^3+16n^2+53n-28\right)}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+6)(n+7)} & \text{si } \; n\equiv 3 \bmod 4\end{cases} \tag{5}$$

Les formules ci-dessus permettent de constater directement qu'au fur et à mesure que le nombre de votants tend vers l'infini la fréquence des profils conduisant simultanément aux paradoxes d'Anscombe et d'Ostrogorski tend vers $\frac{1}{128}\approx 0,781\%$ une limite maximale (puisque la fréquence augmente lorsque le nombre de votants augmente) très faible. Des valeurs numériques sont fournies dans le tableau 3.

3.4. Le cas de motions nombreuses

Les difficultés techniques s'accroissent considérablement lorsqu'on envisage d'examiner le cas de plus de trois motions. Dans le cadre que nous nous sommes donné ci-dessus avec trois motions, nous avions $2^3 = 8$ variables, ce qui correspond à un nombre relativement raisonnable de variables, pour entreprendre une approche analytique du type de celle que nous avons menée dans les sous-sections précédentes. Le passage à 4 motions avec les mêmes hypothèses sur les votes individuels nous amène à prendre en compte $2^4 = 16$ variables, ce qui en termes de calculs n'est pas possible même à l'aide de notre programme informatique, en raison du nombre extrêmement élevé de cas à étudier, pour obtenir des formules semblables à celles obtenues ci-dessus. De plus, même si l'obtention de telles formules était possible, celles-ci seraient illisibles[4] et ne présenteraient donc que peu d'intérêt. Une solution pour obtenir des fréquences exactes consiste à effectuer une énumération exhaustive de tous les profils conduisant aux paradoxes ; mais en raison là aussi des limites de l'informatique, seuls quelques cas peuvent être examinés de cette manière, cas (pas nécessairement irréalistes cependant) correspondant à de très petites commissions. Etant donné ces limites, une solution habituelle consiste à effectuer des simulations (voir par exemple Kelly (1989), ou Mbih, Courtin et Moyouwou (2010), parmi d'autres auteurs) qui fournissent des estimations des fréquences. Ces fréquences sont obtenues sous l'hypothèse IAC par la technique de Monte-Carlo : des probabilités égales sont attribuées aux profils anonymes, puis un ensemble d'un million de profils est généré au hasard, et ensuite nous dénombrons parmi ces profils ceux pour lesquels le paradoxe étudié se produit ; notons tout de même que pour 11 et 13 motions, en raison de limites de nos ordinateurs, seuls 200.000 profils ont été engendrés. Dans ce cadre, nous obtenons des résultats pour quatre, cinq, six, sept, neuf, onze et treize motions. Nous donnons des résultats uniquement pour le modèle IAC du fait que les calculs sont beaucoup plus longs (parfois interminables) pour le modèle IC.

Il est important de noter par ailleurs qu'avec un nombre pair de motions, il existe une différence supplémentaire entre les deux paradoxes. Lorsqu'un votant approuve la moitié des points d'une plate-forme et rejette l'autre moitié, en nous fondant sur le critère de la majorité pour savoir s'il accepte ou rejette la plate-forme, on est dans l'embarras et il peut sembler nécessaire d'introduire un mécanisme pour départager les ex æquo. Nous n'avons fait ici aucune hypothèse de ce type, et nous admettons simplement que de tels votants s'abstiennent sur la plate-forme ; et de la même manière, sur le vecteur de décisions collectives, nous admettons que le paradoxe d'Ostrogorski ne se produit pas si le nombre de motions collectivement rejetées est égal au nombre de motions collectivement acceptées. Aucun mécanisme de ce type n'est nécessaire pour le paradoxe d'Anscombe. Lorsqu'un votant rejette autant de motions qu'il en approuve, il peut malgré cela être en désaccord avec les décisions collectives sur une majorité de motions ; et si ces votants forment une majorité, on a alors le paradoxe d'Anscombe.

Nos résultats montrent que pour les deux paradoxes, les fréquences sont beaucoup plus faibles lorsque le nombre de motions est pair que dans le cas impair. En outre, étant donné le nombre de votants, si on s'en tient uniquement aux nombres pairs (ou seulement aux nombres impairs) de motions, on observe qu'au fur et à mesure que le nombre de motions s'accroît le paradoxe d'Anscombe devient de moins en moins fréquent (tableau 4). En revanche, et contrairement aux simulations de Kelly sur le paradoxe d'Ostrogorski, nos résultats montrent que les fréquences

[4] Voir par exemple: Mbih Moyouwou et Pïcot (2008), pour des formules obtenues dans un problème à 12 variables.

ont tendance à augmenter aussi bien avec une augmentation du nombre de votants que du nombre de motions (tableau 5). Bien plus, pour le cas de trois motions les résultats des simulations de Kelly sont très proches de nos résultats analytiques pour le paradoxe d'Anscombe, sous l'hypothèse IC. Ceci renforce le risque de confusion entre les deux paradoxes, et suggère qu'en réalité Kelly (1989) a calculé la probabilité d'avoir le paradoxe d'Anscombe, et non la probabilité d'avoir le paradoxe d'Ostrogorski. Enfin, en observant l'évolution des fréquences du paradoxe d'Ostrogorski pour les plus grandes valeurs de n (51, 75 et 99) dans les tableaux 2 et 4, on remarque qu'au fur et à mesure que les valeurs impaires de m s'accroissent, les fréquences tendent vers une limite finie, dont nous conjecturons qu'elle se situe au tour de 28%, ou tout au moins entre 27 et 28%, lorsque le nombre de motions tend vers l'infini[5].

Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes attachés à comparer les paradoxes d'Anscombe et d'Ostrogorski. Nous avons examiné les conditions techniques dans lesquelles ces phénomènes se produisent sous la règle de la majorité pour une plate-forme contenant trois points et avons mis en lumière le fait que le paradoxe d'Anscombe est susceptible d'apparaître lorsque l'électorat comprend au moins quatre votants, alors que pour le paradoxe d'Ostrogorski un électorat de deux votants peut suffire. En outre, les fréquences du paradoxe d'Anscombe sont nettement plus faibles que celles du paradoxe d'Ostrogorski. Il faut aussi noter que, contrairement à l'intuition, le nombre de profils auxquels les deux paradoxes se produisent simultanément est très faible ; et en réalité, ces phénomènes coïncident uniquement lorsque les points de la plate-forme sont tous collectivement acceptés ou tous collectivement rejetés. Par conséquent, étant donné l'Assertion 2, les valeurs numériques dans les tableaux 2 et 3 confirment l'Assertion 1 dans la mesure où les fréquences de double paradoxe sont dans un rapport de 1 à 4 avec les fréquences du paradoxe d'Anscombe, pour des valeurs impaires du nombre de votants. Par ailleurs, l'évolution des fréquences sur l'ensemble des tableaux nous permet (1) d'observer que la fréquence du paradoxe d'Anscombe augmente avec la taille de l'électorat pour un nombre fixe de motions, qu'elle tend vers 0 lorsque le nombre de motions et celui des votants augmentent; (2) de conjecturer que l'augmentation conjointe du nombre de motions et du nombre de votants se traduit par une augmentation de la fréquence du paradoxe d'Ostrogorski, qui en IAC tend vers une valeur limite inférieure à 30% (probablement entre 27 et 28%) ; mais ce dernier point mérite d'être exploré plus profondé-

[5] Les capacités limitées de nos ordinateurs n'ont malheureusement pas permis davantage de précision.

ment. Bien plus, le nombre d'inéquations et le nombre de variables augmentant de façon exponentielle avec le nombre de motions, les résultats exacts deviennent difficilement envisageables lorsque les commissions doivent statuer sur un nombre élevé de motions. Il serait alors intéressant d'examiner la complexité du problème ainsi posé en termes de temps d'exécution des calculs, pour un nombre de votants et un nombre de motions donnés. Enfin, une dernière piste de recherche concerne la relation entre les deux paradoxes et des comportements stratégiques tels que le *logrolling* ou l'échange de votes.

Nous adressons nos remerciements au programme de recherche CoCoRICo-CoDec ANR-14-CE24–0007–02. Nous souhaitons aussi remercier Issofa Moyouwou pour son aide sur tous les aspects liés à la programmation sur ordinateur.

Appendice

Tableau 1. Fréquences des paradoxes pour trois motions sous le modèle IC

n	Anscombe	Ostrogorski	*n*	Anscombe	Ostrogorski
2	0,00000	0,09375	14	0,01682	0,15048
3	0,00000	0,14063	15	0,03281	0,21453
4	0,00586	0,11572	16	0,01788	0,15401
5	0,01465	0,17944	17	0,03385	0,21633
6	0,00961	0,12726	18	0,01880	0,15708
7	0,02243	0,19547	19	0,03468	0,21774
8	0,01217	0,12910	20	0,01960	0,15977
9	0,02681	0,20377	21	0,03534	0,21886
10	0,01407	0,14138	24	0,02095	0,16432
11	0,02956	0,20878	27	0,03675	0,22122
12	0,01558	0,14634	32	0,02299	0,17115
13	0,03144	0,21213	39	0,03826	0,22371

Tableau 2. Fréquences des paradoxes pour trois motions sous le modèle IAC

n	Anscombe	Ostrogorski	*n*	Anscombe	Ostrogorski
2	0,00000	0,08333	12	0,01203	0,11990
3	0,00000	0,10000	15	0,02594	0,16350
4	0,00303	0,09393	21	0,02815	0,16708
5	0,01010	0,13131	27	0,02922	0,16877
6	0,00583	0,10198	33	0,02982	0,16970
7	0,01632	0,114568	39	0,03019	0,17027
8	0,00824	0,10893	51	0,03060	0,17089
9	0,02028	0,15349	100	0,02728	0,17115
10	0,01028	0,11487	∞	0,031250	0,171875

Tableau 3. Fréquences du double paradoxe pour trois motions sous le modèle IAC

n	Fréquences	*n*	Fréquences	*n*	Fréquences
2	0,00000	15	0,00649	42	0,00609
3	0,00000	18	0,00522	45	0,00761
4	0,00303	21	0,00704	48	0,00623
5	0,00253	24	0,00549	51	0,00765
6	0,00408	27	0,00731	63	0,00770
7	0,00408	30	0,00573	75	0,00773
8	0,00451	33	0,00746	99	0,00777
9	0,00507	36	0,00592	199	0,00780
12	0,00488	39	0,00755	∞	0,00781

Tableau 4. Fréquences* du paradoxe d'Ostrogorski pour plus de trois motions sous IAC

$m \rightarrow$ / $n \downarrow$	4	5	6	7	9	11	13
2	**0,0882353**	**0,1420455**	0,1663125	**0,1780345**	0,2008930	0,214350	0,224460
3	**0,0000000**	**0,1637701**	0,0118010	**0,1904735**	0,2019580	0,209430	0,209940
4	**0,0706914**	**0,1552712**	0,1409385	0,1900905	0,2136080	0,230640	0,246600
5	**0,0092879**	**0,1988902**	0,0284730	0,2221755	0,2305930	0,234530	0,236938
6	**0,0608322**	**0,1614933**	0,1239470	0,1925100	0,2135030	0,230843	0,245860
7	**0,0158552**	0,2125258	0,0386150	0,2334730	0,2414730	0,245160	0,246400
8	**0,0548914**	0,1661480	0,1134185	0,1950165	0,2133590	0,227287	0,243690
9	0,0206545	0,2204163	0,0452460	0,2392640	0,2471170	0,250780	0,251080
12	0,0487640	0,1745788	0,1011265	0,1978710	0,2144970	0,225690	0,234590
15	0,0288720	0,2291265	0,0571260	0,2470010	0,2531620	0,257675	0,258170
18	0,0454000	0,1840805	0,0930845	0,2030490	0,2148900	0,225090	0,233300
21	0,0334065	0,2326398	0,0630940	0,2509695	0,2576880	0,258525	0,262400
27	0,0360595	0,2343093	0,0678325	0,2525165	0,2577580	0,261075	0,264693
39	0,0396205	0,2362318	0,0721695	0,2541115	0,2604950	0,263930	0,266140
51	0,0411425	0,2370623	0,0749905	0,2550305	0,2609750	0,264075	0,265360
75	0,0433365	0,2377460	0,0790705	0,2559880	0,2627460	0,266280	0,266853
99	0,0443535	0,2384363	0,0810685	0,2573950	0,2633140	0,268670	0,269740

*Estimations. Les nombres en gras sont des valeurs exactes.

Tableau 5. Fréquences* du paradoxe d'Anscombe pour plus de trois motions sous IAC

$m \rightarrow$ / $n \downarrow$	4	5	6	7	9	11
4	**0,0000000**	**0,0020054**	0,0000205	0,0008695	0,0003840	0,000160
5	**0,0000000**	**0,0063662**	0,0000905	0,0025643	0,0009740	0,000375
6	**0,0000184**	**0,0036012**	0,0000285	0,0015793	0,0006260	0,000230
7	**0,0000938**	0,0097875	0,0001250	0,0040160	0,0016210	0,000670
8	**0,0000265**	0,0048565	0,0000385	0,0020885	0,0008920	0,000400
9	**0,0001101**	0,0119425	0,0001110	0,0049413	0,0020170	0,000825
12	0,0003150	0,0066740	0,0000215	0,0028085	0,0011370	0,000470
15	0,0000860	0,0148445	0,0000445	0,0061933	0,0025610	0,001135
18	0,0000255	0,0084860	0,0000075	0,0034855	0,0014640	0,000680
21	0,0000515	0,0160970	0,0000200	0,0067578	0,0029060	0,001265
24	0,0000180	0,0097515	0,0000060	0,0039400	0,0017200	0,000710
27	0,0000400	0,0168620	0,0000085	0,0071750	0,0029740	0,001235
32	0,0000185	0,0109400	0,0000035	0,0044028	0,0018250	0,007450
39	0,0000195	0,0172950	0,0000020	0,0074928	0,0031950	0,001490
51	0,0000210	0,0174615	ε	0,0076225	0,0033980	0,001390
75	0,0000095	0,0179040	ε	0,0078475	0,0033730	0,001370
99	0,0000115	0,0180250	ε	0,0078940	0,0034630	0,001575

*Les valeurs en gras sont des fréquences exactes. ε représente des fréquences inférieures à 10^{-7}.

Bibliographie

Anscombe GEM, (1976), *On Frustration of the Majority by Fulfillment of the Majority's Will*, Analysis, vol. 36, no. 4, pp. 161–168.

Bezembinder, T., Van Acker, P., (1985), *The Ostrogorski Paradox and its Relation to Nontransitive Choice*, Journal of Mathematical Sociology vol. 11, pp. 131–158.

Dummett, M., (1984), *Voting procedures*, Clarendon Press, Oxford.

Gehrlein, W.V., (2006), *Condorcet's Paradox*, Springer, Berlin.

Gehrlein, W.V., (1976), *Condorcet's Paradox and Anonymous Preference Profiles*, Public Choice, vol. 26, pp. 1–18.

Gehrlein, W.V., Lepelley, D., (2012), *The Value of Research Based on Simple Assumptions on Voters' Preferences*, dans: Felsenthal, D., Machover, M. (eds), *Electoral Systems*, Springer, Berlin.

Kelly, J.S., (1989), *The Ostrogorski paradox*, Social Choice and Welfare, vol. 6, pp. 71–76.

Laffond, G., Lainé, J., (2009), *Condorcet Choice and the Ostrogorski Paradox*, Social Choice and Welfare, vol. 32, pp. 317–333.

Laffond, G., Lainé, J., (2011), *Unanimity and the Anscombe's paradox*, TOP.

Lepelley, D., Louichi, A., Smaoui, H., (2008), *On Ehrhart Polynomials and Probability Calculations in Voting Theory*, Social Choice and Welfare, vol. 30, pp. 363–383.

Mbih, B., Moyouwou, I., Picot, J., (2008), *Pareto Violations of Parliamentary Voting Systems*, Economic Theory, vol. 34, pp. 331–358.

Mbih, B., Courtin, S., Moyouwou, I., (2010), *Susceptibility to Coalitional Strategic Sponsoring: the Case of Parliamentary Agendas*, Public Choice, vol. 144, pp. 133–151.

Nurmi, H., (1999), *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*, Springer, Berlin.

Nurmi, H., Meskanen, T., (1997), *Voting Paradoxes and MCDM*, Social Choice and Welfare, vol. 15, pp. 333–350.

Nurmi, H., Saari, DG., (2010), *Connections and Implications of the Ostrogorski Paradox for Spatial Voting Models*, dans: van Deemen, A., Rusinowska, A. (eds.), *Collective Decision Making: Views from Social Choice and Game Theory*, Springer, Berlin.

Ostrogorski, M., (1902), *La démocratie et l'organisation des partis politiques*, Calmann-Levy, Paris.

Regenwetter, M., Grofman, B., Marley, A.A.J., Tsetlin, I.M., (2006), *Behavioral Social Choice: Probabilistic Models, Statistical Inference, and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.