REVUE INTERNATIONALE DES ECONOMISTES DE LANGUE FRANÇAISE 2026, VOL. 11, N°1

https://doi.org/10.18559/RIELF.2026.1.4125

Armement, accumulation de capital et croissance économique (analyse basée sur un modèle de croissance multiproduits)

Armament, capital accumulation, and economic growth (analysis based on a multi-product growth model)

Katarzyna FILIPOWICZ

Université Jagellonne[1], Cracovie, Pologne
Département d'économie mathématique
k.filipowicz@uj.edu.pl
https://orcid.org/0000-0003-2131-0414

Tomasz TOKARSKI

Université Jagellonne[2], Cracovie, Pologne
Département d'économie mathématique
t.tokarski@uj.edu.pl
https://orcid.org/0000-0002-9551-0892

Abstract

Purpose: The article aims to analyse the optimal allocation of production factors between sectors producing consumer, investment and military goods and services within the framework of supply-side, neoclassical models of economic growth and to find the golden rules of capital accumulation and armaments.

Design/methodology/approach: The proposed model is a compilation of Uzawa's two-sector growth model, Nonneman–Vanhoudt's multi-capital model, and the military-inclusive approach proposed by Filipowicz et al. (2025). The model assumes that the economy produces a finite number of consumers, investment, and military goods and services. The production processes of these goods and services are described by extended Cobb–Douglas production functions. The asymptotic stability of the nontrivial steady state of the examined growth model can be demonstrated using the Lyapunov function or the Grobman–Hartman theorem. Optimal allocation is determined by conditional

[1] Uniwersytet Jagielloński, ul. Gołębia 24, 31-007 Kraków.
[2] Uniwersytet Jagielloński, ul. Gołębia 24, 31-007 Kraków.

maximisation of the social utility function, defined as the weighted geometric mean of long-run consumption and long-run military production per worker.

Findings: This article derives formulas for the golden rule shares of factor inputs allocated to each of the three sectors of the economy, expressed in terms of the elasticities of the sectoral production functions and the elasticity σ of the social utility function. It is shown that an increase in the share of factors engaged in the investment sector leads to an increase in long-run production in all three sectors, while shifts of factors to the consumer or military sectors generate crowding-out effects similar to those found in the IS-LM Hicks model. In borderline cases, when $\sigma \to 0^{+}$ (absolute security priority) civilian sector production approaches zero ; however, when $\sigma \to 1^{-}$ (absolute welfare priority) The military sector is completely extinguished.

Originality/value: The authors' own contribution is the generalisation of Uzawa's two-sector model to the multi-product case, its integration with the multi-capital Nonneman–Vanhoudt approach, and the formal inclusion of the military sector (rarely analysed in mainstream economic growth theory). The model allows for a precise quantification of the „butter or guns" dilemma and provides golden rules for accumulation and armament that can be applied to economies with diverse geopolitical preferences.

Keywords: neoclassical growth models, Uzawa model, Nonneman–Vanhoudt model, military spending, Phelps' golden rule, optimal allocation of production factors, butter or guns dilemma.

Résumé

Objectif : Cet article vise à analyser l'allocation optimale des facteurs de production entre les secteurs de production de biens et services de consommation, d'investissement et militaires, dans le cadre des modèles néoclassiques de croissance économique axés sur l'offre, et à identifier les principes fondamentaux de l'accumulation du capital et des armements.

Méthodologie : Le modèle proposé combine le modèle de croissance à deux secteurs d'Uzawa, le modèle multicapital de Nonneman–Vanhoudt et l'approche intégrant le secteur militaire proposée par Filipowicz et al. (2025). Il suppose que l'économie produit un nombre fini de biens et services de consommation, d'investissement et militaires. Les processus de production de ces biens et services sont décrits par des fonctions de production Cobb–Douglas étendues. La stabilité asymptotique de l'état stationnaire non trivial du modèle de croissance étudié peut être démontrée à l'aide de la fonction de Lyapunov ou de la théorie de Grobman–Hartman. L'allocation optimale est déterminée par la maximisation conditionnelle de la fonction d'utilité sociale, définie comme la moyenne géométrique pondérée de la consommation et de la production militaire à long terme par travailleur.

Résultats : Cet article établit des formules pour les parts optimales des facteurs de production allouées à chacun des trois secteurs de l'économie, exprimées en fonction des élasticités des fonctions de production sectorielles et de l'élasticité σ de la fonction d'utilité sociale. Il est démontré qu'une augmentation de la part des facteurs engagés

dans le secteur de l'investissement entraîne une hausse de la production à long terme dans les trois secteurs, tandis que les transferts de facteurs vers les secteurs de la consommation ou de la défense génèrent des effets d'éviction similaires à ceux observés dans le modèle IS-LM de Hicks. Dans les cas limites, lorsque $\sigma \to 0^+$ (priorité absolue à la sécurité), la production du secteur civil tend vers zéro ; en revanche, lorsque $\sigma \to 1^-$ (priorité absolue au bien-être), le secteur militaire est complètement anéanti.

Originalité/Valeurs : La contribution des auteurs réside dans la généralisation du modèle à deux secteurs d'Uzawa aux cas multiproduits, son intégration à l'approche multicapitale de Nonneman–Vanhoudt et l'inclusion formelle du secteur militaire (rarement analysé dans la théorie dominante de la croissance économique). Le modèle permet une quantification précise du dilemme « beurre ou armes » et fournit des règles d'or pour l'accumulation et l'armement, applicables à des économies aux préférences géopolitiques diverses.

Mots-clés : modèles de croissance néoclassiques, modèle d'Uzawa, modèle de Nonneman–Vanhoudt, dépenses militaires, règle d'or de Phelps, allocation optimale des facteurs de production, dilemme « beurre ou armes ».

JEL classification : O41, H56, E22, C62.

Introduction

L'analyse de l'impact des dépenses militaires sur l'économie s'articule traditionnellement autour de mécanismes opposés. À court terme, les approches keynésiennes mettent en avant des effets multiplicateurs potentiels en présence de capacités de production inutilisées. À long terme, cependant, le modèle IS-LM de Hicks (1937) met en lumière un effet d'éviction sur l'investissement privé et la consommation, ralentissant l'accumulation du capital et la croissance du PIB potentiel. Bien que l'expansion militaire puisse induire des chocs technologiques positifs par des transferts d'innovation vers le secteur civil, cet effet d'offre ne se vérifie que si la défense s'appuie sur une production nationale plutôt que sur des importations d'armements.

La réapparition récente de menaces géopolitiques majeures en Europe, notamment l'impérialisme russe pesant sur le bassin oriental de la mer Baltique et la Roumanie, réactualise de manière cruciale le dilemme classique entre « le beurre ou les armes ». Alors que des pays éloignés des conflits comme l'Italie ou ceux de la péninsule Ibérique tendent à stabiliser leurs budgets de défense, les nations de première ligne font face à une nécessité impérieuse et socialement acceptée d'augmenter ces dépenses, malgré les coûts d'opportunité immédiats sur la consommation civile. Dès lors, définir formellement les critères d'une allocation optimale des ressources limitées (capital ou travail)

entre les sphères civile et militaire devient un enjeu académique ou politique majeur.

L'objectif de cet article est d'analyser les fondements théoriques de l'allocation optimale des facteurs de production entre les secteurs de la consommation, de l'investissement et de la défense, dans le cadre de modèles néoclassiques axés sur l'offre. Notre contribution originale consiste à synthétiser le modèle de croissance à deux secteurs d'Uzawa (1961, 1963) et l'approche multicapital de Nonneman–Vanhoudt (1996), tout en intégrant de manière formalisée le secteur de la défense, souvent marginalisé dans la théorie dominante de la croissance. En introduisant une fonction d'utilité sociale pondérant bien-être et sécurité, nous établissons des « règles d'or » analytiques pour l'accumulation et le réarmement, capables de quantifier rigoureusement ce dilemme selon les préférences géopolitiques de chaque économie.

Cet article est composé des sections suivantes : la première section présente une revue critique de la littérature théorique et empirique. La deuxième section expose les hypothèses sous-jacentes et la formalisation de notre modèle d'équilibre. La troisième section est consacrée à la dérivation analytique des règles d'or et à la discussion de leurs propriétés économiques face aux variations des élasticités sectorielles. Enfin, la conclusion synthétise les principaux résultats obtenus.

1. Revue de la littérature

La littérature sur le sujet ne fait pas encore consensus quant à l'impact des dépenses militaires sur la croissance économique. Le point de départ de nombreuses analyses contemporaines reste la vérification de l'hypothèse de Benoît, qui, dans les années 1970, postulait une corrélation positive entre les dépenses militaires et le taux de croissance économique des pays en développement (Benoît, 1973, 1978). La méta-analyse d'Alptekin et Levine (2012), portant sur 32 études empiriques et 169 estimations, a apporté un certain soutien à ces hypothèses, indiquant un impact positif des dépenses militaires, principalement dans les pays développés. Par ailleurs, l'hypothèse d'Alptekin et Levine d'une corrélation négative entre les dépenses militaires et la croissance économique n'a pas été confirmée, ni pour les pays les moins développés, ni globalement (Alptekin & Levine, 2012). Par contre, des conclusions peuvent être tirées des travaux de Dunne et Tian (2013, 2015), qui, s'appuyant sur une analyse de 170 publications, concluent que les études récentes apportent des arguments de plus en plus solides en faveur d'un impact négatif des dépenses militaires

sur la croissance économique. Ceci pourrait être lié au développement des méthodes économétriques et à l'amélioration de la qualité des données empiriques (Dunne & Tian, 2013). Dans leurs travaux ultérieurs, Dunne et Tian (2015), à partir de données empiriques portant sur 106 pays entre 1988 et 2010, analysent l'impact des dépenses militaires sur la croissance économique, en tenant compte de l'hétérogénéité potentielle des groupes due aux différences de niveaux de revenus, à l'expérience des conflits, à l'abondance des ressources naturelles, à l'ouverture de l'économie et à l'aide étrangère reçue. L'estimation des paramètres de l'équation pour l'ensemble de l'échantillon a confirmé leurs conclusions précédentes: le poids des dépenses militaires affecte négativement la croissance économique à court et à long terme. Les résultats des estimations pour les groupes individuels se sont avérés cohérents avec les résultats pour l'ensemble du panel, ce qui, selon les auteurs, apporte un soutien important à l'hypothèse concernant l'impact négatif des dépenses militaires sur la croissance économique (Dunne & Tian, 2015).

Les analyses récentes de la relation entre les dépenses militaires et la croissance économique délaissent les études corrélationnelles simplistes au profit de modèles économétriques et macroéconomiques dynamiques plus avancés. Leur cadre théorique repose sur la dichotomie entre les mécanismes de l'offre et ceux de la demande concernant l'impact des dépenses militaires sur la croissance économique. Dans le cadre de l'approche par l'offre, les chercheurs se réfèrent le plus souvent au modèle de croissance de Feder–Ram (Feder, 1982 ; Ram, 1986), qui constitue une référence pour de nombreuses études empiriques contemporaines (par exemple, Dunne et al., 2005 ; Kurt, 2015). Ce modèle analyse le fonctionnement de deux secteurs de l'économie : les secteurs civil et militaire. Les volumes de production (C et M) de ces secteurs sont décrits par des fonctions de production néoclassiques.

$$C = C(M, K_c, L_c) \wedge M = M(K_m, L_m),$$

où K_c, K_m signifie les dépenses d'investissement dans les secteurs suivants, L_c, L_m – charge de travail. Le volume total de production de l'économie s'écrit alors comme suit : $Y = C + M$. De la fonction de production dans le secteur civil $C = C(M, K_c, L_c)$, Il s'ensuit que le modèle Feder–Ram suppose que ce secteur bénéficie d'externalités (par exemple, par l'absorption de nouvelles technologies) résultant de l'expansion du secteur militaire. De plus, le modèle Feder–Ram suppose que :

$$\frac{M_L}{C_L} = \frac{M_K}{C_K} = 1 + \mu, \text{ où } M_L, M_K\,[C_L, C_K]$$

désigne (respectivement) la productivité marginale du travail et la productivité marginale du capital dans le secteur militaire [civil] de l'économie, et $\mu > 0$. En conclusion, dans le modèle présenté ici, le secteur militaire se caractérise par des productivités marginales plus élevées pour chaque facteur de production que le secteur civil. À partir des hypothèses précédentes, nous obtenons l'équation du taux de croissance du produit. $\frac{\dot{Y}}{Y}$ donnée par la formule (d'après Dunne et al., 2005) :

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{C_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L} + C_K \cdot \frac{I}{Y} + \left(\frac{\mu}{1+\mu} + C_M \right) \cdot \frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M},$$

où I désigne le volume des investissements réalisés dans l'économie, et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – augmentation de la valeur de la variable x au temps t, et par conséquent $\frac{\dot{x}}{x}$ est le taux de croissance de la variable x. Cette équation permet de séparer précisément l'impact de l'augmentation de la main-d'œuvre $\left(\frac{C_L L}{Y} . \frac{\dot{L}}{L} \right)$, augmentation du capital $\left(C_K \cdot \frac{I}{Y} \right)$ et l'expansion du secteur militaire

$$\left(\left(\frac{\mu}{1+\mu} + C_M \right) \cdot \frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M} \right)$$

sur le taux de croissance économique $\frac{\dot{Y}}{Y}$. Cette relation est souvent utilisée dans les analyses empiriques pour examiner l'impact de la production du secteur militaire sur la croissance du PIB et pour déterminer la part

$$\frac{\frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}{\frac{C_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L} + C_K \cdot \frac{I}{Y} + \left(\frac{\mu}{1+\mu} + C_M \right) \cdot \frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}$$

des dépenses militaires dans la croissance de la production[3].

[3] Équation du taux de croissance $\frac{\dot{Y}}{Y}$ et la part des dépenses militaires dans la croissance de la production

Une alternative au modèle Feder–Ram pourrait être une généralisation du modèle de Solow, prenant en compte le secteur militaire. Cette généralisation est proposée dans l'ouvrage de Filipowicz et al. (2026, chapitre 4), où l'on suppose que l'économie est décrite par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} C = aK_c^{\alpha} L_c^{1-\alpha} \wedge M = aK_m^{\beta} L_m^{1-\beta} \\ a = \left(1 - e^{\frac{-K_m}{L_m}}\right)^{\theta} \cdot \left(1 - e^{\frac{-K_c}{L_c}}\right)^{1-\theta} \\ K_c = uK \wedge K_m = (1-u)K \\ L_c = vL \wedge L_m = (1-v)L \\ \dot{K} = sC - \delta K \\ L = e^{nt} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}{\frac{C_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L} + C_K \cdot \frac{I}{Y} + \left(\frac{\mu}{1+\mu} + C_M\right) \cdot \frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}$$

dans le modèle Feder–Rama, il est en grande partie similaire à l'équation résiduelle de Solow (1957)

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}\right),$$

où $\frac{\dot{A}}{A}$ désigne le taux de progrès technique exogène, $\frac{\dot{Y}}{Y}, \frac{\dot{K}}{K}, \frac{\dot{L}}{L}$ –les taux de croissance du produit et des ressources des facteurs de production, et $\alpha \in (0, 1)$ – l'élasticité de la fonction de production Cobb–Douglas par rapport aux intrants de capital. Ceci s'explique par le fait que l'équation des résidus de Solow et l'équation de Feder–Ram reposent toutes deux sur la même logique de comptabilité de la croissance économique. De plus, à partir de l'équation des résidus de Solow, nous pouvons facilement déterminer la part

$$\frac{\dot{A}/A}{\frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}}$$

progrès technique dans la croissance de la production, dont une certaine généralisation est la part

$$\frac{\frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}{\frac{C_L L}{Y} \cdot \frac{\dot{L}}{L} + C_K \cdot \frac{I}{Y} + \left(\frac{\mu}{1+\mu} + C_M\right) \cdot \frac{M}{Y} \cdot \frac{\dot{M}}{M}}$$

dépenses militaires $\frac{M}{Y}$ dans le modèle Feder–Ram.

Les équations du système sont interprétées économiquement comme suit.

Premièrement, le processus de production dans le secteur civil [militaire] est décrit par une fonction de production Cobb–Douglas dont l'élasticité de la production par rapport à l'apport de capital est égale à $\alpha \in (0, 1)$ [$\beta \in (0, 1)$] et la productivité totale des facteurs dans les deux secteurs $a > 0$.

Deuxièmement, la productivité totale des facteurs est liée aux dépenses d'investissement par travailleur, tant dans le secteur civil que dans le secteur industriel $\frac{K_c}{L_c}$, ainsi que le militaire $\frac{K_m}{L_m}$. Paramètre $\theta \in (0, 1)$ [$1 - \theta$]. C'est un coefficient de pondération décrivant l'intensité de l'impact du capital par travailleur dans le secteur militaire [civil] sur la productivité totale des facteurs. De plus, si le capital par travailleur dans les deux secteurs de l'économie passe de 0 à $+\infty$. Cette technologie se développe de plus en plus lentement de 0 à 1.

Troisièmement, les apports de capital et de main-d'œuvre sont répartis entre les secteurs civil et militaire dans les proportions suivantes : $\frac{u}{1-u}$ et $\frac{v}{1-v}$ (où $u, v \in (0, 1)$).

Quatrièmement, puisque le secteur militaire ne produit pas de produits d'investissement, l'augmentation de capital correspond à la différence entre les investissements sC du secteur civil et l'amortissement du capital (alors que $s \in (0, 1)$ correspond au taux d'investissement, et $\delta \in (0, 1)$ – taux d'amortissement du capital).

Cinquièmement, le nombre de personnes employées L augmente au rythme de croissance $n > 0$.

Dans un tel modèle de croissance économique, l'équation de la croissance du capital par travailleur $k = \frac{K}{L}$ (qui, dans le modèle de Solow avec la fonction de production Cobb–Douglas, est l'équation différentielle de Bernoulli, peut s'écrire comme $\dot{k} = \big(sp(k) - (\delta + n)\big)k$, où

$$p(k) = \left(1 - e^{\frac{-(1-u)k}{(1-v)}}\right)^{\theta} \cdot \left(1 - e^{\frac{-uk}{v}}\right)^{1-\theta} \cdot u^{\alpha} \cdot v^{1-\alpha} \cdot k^{\alpha-1},$$

désigne la fonction de productivité du capital. Puisque la fonction de productivité du capital est une fonction unimodale présentant un maximum en un certain point $\overline{k} > 0$, par conséquent, l'équation différentielle ci-dessus doit être considérée dans trois cas séparables.

Tout d'abord, si $p(\overline{k}) < \frac{s}{\delta + n}$, alors cette équation ne présente aucun point stationnaire non trivial et le capital par travailleur tend toujours à 0 à long terme.

Deuxièmement, si la productivité du capital $p(\overline{k}) = \frac{s}{\delta + n}$, alors cette équation décrivant l'augmentation du capital par travailleur possède un point stationnaire non trivial $\overline{k}$, instable à gauche [stable à droite]. On en déduit qu'avec le capital initial par travailleur $k(0)$ plus petit [plus grand] que $\overline{k}$ à long terme $k \to 0$ [$k \to \overline{k}$].

Troisièmement, si $p(\overline{k}) > \frac{s}{\delta + n}$, nous obtenons deux points stationnaires non triviaux $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$, tels que $0 < \overline{k}_1 < \overline{k} < \overline{k}_2$, dont $\overline{k}_1$ est un point stationnaire instable, $\overline{k}_2$ et – un point stable. Dans ce cas, à $k(0) < \overline{k}_1 \left[k(0) > \overline{k}_1 \right]$ à long terme $k \to 0$ [$k \to \overline{k}_2$].

Dans l'approche par la demande, en s'appuyant sur les théories et la macroéconomie keynésienne, les dépenses militaires sont considérées comme un stimulus exogène qui, à court terme, stimule la demande globale par un mécanisme multiplicateur. Cependant, il est nécessaire de noter que l'augmentation des dépenses militaires peut évincer l'investissement privé, ce qui limite le taux d'accumulation de capital et, par conséquent, la croissance économique à long terme. En effet, Malizard (2015) analyse l'impact des dépenses militaires sur l'investissement du secteur privé en France entre 1980 et 2010, dont les analyses statistiques présentées dans cet article indiquent que les dépenses militaires évinceront l'investissement, ce qui est cohérent avec les conclusions fondamentales des modèles macroéconomiques keynésiens à court terme. Ainsi que Malizard ventile également les dépenses militaires en équipements et autres dépenses militaires. Cette ventilation le conduit à la conclusion que les dépenses d'équipement stimulent l'investissement, tandis que les autres dépenses militaires l'évinceront. Cela signifie que les dépenses militaires en équipements et les dépenses d'investissement privé peuvent se compléter. Élargissant son analyse au niveau international, Malizard (2016) évalue les effets à long terme des dépenses publiques sur la croissance économique dans les 15 pays de l'UE, en les ventilant entre dépenses militaires et non militaires. Les résultats des analyses statistiques menées dans cette étude indiquent des impacts différents selon le type de dépenses publiques examinées sur le taux de croissance économique. Ensuite, par cette distinction, Malizard soutient qu'à court terme, les dépenses militaires (contrairement aux dépenses non militaires) n'ont pas d'impact négatif statistiquement significatif sur la croissance économique. Cependant, à long terme, l'impact des dépenses, tant militaires que non militaires, est négatif. L'évolution de la démarche de recherche de l'auteur se poursuit dans ses publications les plus récentes. Malizard (2020) affirme que les dépenses militaires ne doivent pas être considérées uniquement comme une charge pour le budget de l'État. En effet, ces dépenses influencent l'économie non seulement en évincant l'investissement et/ou la consommation, mais aussi en freinant l'innovation

et en maintenant le tissu industriel. En revanche, il soutient également que la production d'armements nationaux (plutôt que l'importation d'équipements étrangers) favorise le développement technologique, ce qui peut également profiter au secteur civil de l'économie. Il souligne en outre la nécessité d'une approche de recherche intégrée qui prenne en compte à la fois les effets immédiats et à court terme des armements et leurs conséquences à long terme sur le marché du travail national et l'accumulation de capital humain.

Par conséquent, les résultats de Malizard (2015, 2016, 2020) s'inscrivent dans un large consensus scientifique selon lequel le principal obstacle au développement induit par l'augmentation des dépenses militaires est l'éviction des investissements civils. Cet article est notamment étayé par les analyses de Mylonidis (2008) portant sur les pays de l'UE sur la période 1960–2000. L'auteur fonde ses estimations d'équations de régression sur le modèle de croissance de Barro (1990, 1991), qui prend en compte les différences institutionnelles et économiques entre les pays. Des études pionnières sur les pays en développement, telles que celle de Deger et Smith (1983), montrent que dans les économies à faible revenu, l'effet négatif de l'éviction des investissements par les dépenses militaires surpasse largement les avantages potentiels de la modernisation, ce qui limite par conséquent la dynamique à long terme des processus de développement. Ces conclusions se retrouvent également dans une étude plus récente de Hou et Chen (2013), qui ont analysé un panel de 35 pays en développement (1975–2009) à l'aide de la méthode des moments généralisée (GMM) et ont constaté un impact négatif et statistiquement significatif des dépenses militaires sur la croissance du PIB. La littérature citée indique que les coûts d'opportunité des dépenses militaires l'emportent sur les avantages potentiels, quel que soit le niveau de développement économique du pays. Cet argument est complété par une analyse exhaustive de Heo et Ye (2016), menée sur un échantillon de 161 pays entre 1990 et 2012. En combinant les approches de la demande et de l'offre, Heo et Ye soulignent la double nature du phénomène : les dépenses militaires évinceraient fortement l'investissement privé tout en ayant un certain impact sur la réduction du chômage. En conséquence, à l'échelle mondiale, l'impact des dépenses militaires sur la croissance économique est négligeable.

2. Modèle théorique

2.1. Hypothèses du modèle

Dans les considérations théoriques qui suivent, nous formulons les hypothèses suivantes concernant le fonctionnement de l'économie :

1. L'économie produit un nombre fini de $j \in N$ produits, parmi lesquels j_C sont des produits de consommation, j_I –investissement et j_M – militaires (donc $j_C + j_I + j_M = j$). Par souci de clarté, nous désignons par $J_C = \{1, 2, \ldots, j_C\}$ un ensemble d'indices relatifs aux biens et services de consommation produits ultérieurement, $J_I = \{j_C + 1, j_C + 2, \ldots, j_C + j_I\}$ – dépenses d'investissement, $J_M = \{j_C + j_I + 1, j_C + j_I + 2, \ldots, j\}$ –produits militaires, et par $J = J_C \cup J_I \cup J_M$ – un ensemble d'indices pour tous les produits.
2. La production de chaque produit de consommation, d'investissement et militaire nécessite des ressources supplémentaires j_I ressources en capital et apports de main-d'œuvre.
3. Le processus de production dans le secteur produisant des biens et services de consommation est décrit par la fonction de production étendue de Cobb et Douglas (1928), donnée par la formule suivante[4]:

$$\forall p \in J_C \quad C_p(t) = \phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} K_{pq}^{\alpha_q}(t) \right) \cdot L_p^{1-\sum_{q \in J_I} \alpha_q}(t) \tag{1}$$

où C_p désigne la valeur de production du p-ième produit de consommation, K_{pq} – dépenses d'investissement q liées à la production du bien ou service de consommation p, α_q – élasticité de la fonction de production Cobb–Douglas utilisée par rapport à l'intrant du stock de capital q. Nous supposons également que pour chaque $q \in J_I$ $\alpha_q \in (0, 1)$ et $\sum_{q \in J_I} \alpha_q \in (0, 1)$. $\phi_p > 0$ désigne le prix relatif du p-ième produit. Par conséquent, dans l'équation (1), l'expression

$$\left(\prod_{q \in J_I} K_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot L_p^{1-\sum_{q \in J_I} \alpha_q}$$

décrit le volume du p-ième produit dans certaines unités naturelles (tonnes, litres, pièces, etc.), tandis que :

$$\phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} K_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot L_p^{1-\sum_{q \in J_I} \alpha_q}$$

[4] Nous supposons que toutes les variables macroéconomiques analysées ci-dessous sont des fonctions continues et différentiables du temps $t \geq 0$. L'enregistrement $x(t)$ désignera la trajectoire de la variable x, $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ – la dérivée première de la variable x par rapport au temps t. Cette dérivée est interprétée économiquement comme l'augmentation de la valeur de la variable x au temps t.

désigne la valeur de ce produit à certains prix fixes. Nous faisons des hypothèses similaires concernant la production de produits d'investissement I_q et militaires M_q. Nous prenons donc les fonctions de production :

$$\forall p \in J_I \quad I_p(t) = \chi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} K_{pq}^{\beta_q}(t) \right) \cdot L_p^{1-\sum_{q \in J_I} \beta_q}(t) \tag{2}$$

et

$$\forall p \in J_M \quad M_p(t) = \psi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} K_{pq}^{\gamma_q}(t) \right) \cdot L_p^{1-\sum_{q \in J_I} \gamma_q}(t) \tag{3}$$

Bien sûr, en ce qui concerne les élasticités β_q et γ_q nous supposons que chacun d'eux et leurs sommes $\sum_{q \in J_I} \beta_q$, $\sum_{q \in J_I} \gamma_q$ appartiennent à la gamme (0, 1), alors que $\chi_p, \psi_p > 0$.

4. Chacune des dépenses en capital K_q (pour $q \in J_I$) est réparti entre les producteurs des produits suivants selon les équations :

$$\forall p \in J_C \wedge q \in J_I \quad K_{pq}(t) = u_{pq} K_q(t)$$

$$\forall p, q \in J_I \quad K_{pq}(t) = v_{pq} K_q(t)$$

et

$$\forall p \in J_M \wedge q \in J_I \quad K_{pq}(t) = w_{pq} K_q(t)$$

Les charges de travail homogènes sont réparties de manière similaire. Nous avons donc :

$$\left(\forall p \in J_C \quad L_p(t) = u_p L(t) \right) \wedge \left(\forall p \in J_I \quad L_p(t) = v_p L(t) \right) \wedge$$
$$\wedge \left(\forall p \in J_M \quad L_p(t) = w_p L(t) \right)$$

Nous supposons que chaque facteur de production partage u_{pq}, v_{pq}, w_{pq}, $u_p, v_p, w_p \in [0, 1]$ et que les équations d'équilibre suivantes sont satisfaites :

$$\left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p \in J_C} u_{pq} + \sum_{p \in J_I} v_{pq} + \sum_{p \in J_M} w_{pq} = 1 \right) \wedge \sum_{p \in J_C} u_p + \sum_{p \in J_I} v_p + \sum_{p \in J_M} w_p = 1$$

5. La croissance de chaque ressource en capital $\dot{K}_p$ (pour $p \in J_I$) c'est la différence entre les investissements I_p dans cette ressource et son amortissement

$\delta_p K_p$, où $\delta_p \in (0, 1)$ correspond au taux de dépréciation du capital. Par conséquent, les équations différentielles sont vérifiées.

$$\forall p \in J_I \quad \dot{K}_p(t) = I_p(t) - \delta_p K_p(t) \tag{4}$$

6. L'évolution du nombre total d'employés dans l'économie est décrite par une fonction exponentielle $L(t) = e^{nt}$, où $n = \dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)} > 0$ qui désigne le taux de croissance du nombre d'employés. En prenant la fonction exponentielle $L(t) = e^{nt}$, nous supposons implicitement que le nombre d'employés est exprimé dans des unités telles que la condition initiale soit respectée $L(0) = 1$.

2.2. Modèle d'équilibre

Nous introduisons les notations suivantes : $x = \dfrac{X}{L}$ variable macroéconomique x par employé (c'est-à-dire par exemple c_p désigne la valeur de la production par personne active du p-ième produit de consommation),

$$\mathbb{u}_p = (u_{pj_C+1}, u_{pj_C+2}, \ldots, u_{pj_C+j_I}, u_p)$$

pour $p \in J_C$,

$$\mathbb{v}_p = (v_{pj_C+1}, v_{pj_C+2}, \ldots, v_{pj_C+j_I}, v_p)$$

pour $p \in J_I$ et

$$\mathbb{w}_p (w_{pj_C+1}, w_{pj_C+2}, \ldots, w_{pj_C+j_I}, w_p)$$

pour $p \in J_M$ – combinaisons des parts des intrants des facteurs de production ultérieurs impliqués dans la production du p-ième produit de consommation ($\mathbb{u}_p$), investissement ($\mathbb{v}_p$) et militaire ($\mathbb{w}_p$) :

$$\mathbb{k} = (k_{j_C+1}, k_{j_C+2}, \ldots, k_{j_C+j_I})$$

– combinaison des ressources en capital ultérieures par personne active.

La valeur de production décrite par l'équation (1) du p-ième bien ou service de consommation, conformément à la répartition des facteurs de production de l'hypothèse 4, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\forall p \in J_C \quad C_p(t) = \phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_p^{1 - \sum_{q \in J_I} \alpha_q} \cdot \left(\prod_{q \in J_I} \left(\frac{K_q(t)}{L(t)} \right)^{\alpha_q} \right) \cdot L(t)$$

Ce qui nous amène à la fonction de production sous forme intensive donnée par la formule :

$$\forall p \in J_C \quad c_p(t) = \tilde{c}_p(\mathbb{v}_p) \cdot \left(\prod_{q \in J_I} k_q^{\alpha_q}(t) \right) \tag{5}$$

où

$$\tilde{c}_p(\mathbb{u}_p) = \phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_p^{1-\sum_{q \in J_I} \alpha_q} > 0$$

En procédant de manière analogue, on obtient :

$$\forall p \in J_I \quad i_p(t) = \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) \cdot \left(\prod_{q \in J_I} k_q^{\beta_q}(t) \right) \tag{6}$$

et

$$\forall p \in J_M \quad m_p = \tilde{m}_p(\mathbb{w}_p) \cdot \left(\prod_{q \in J_I} k_q^{\gamma_q}(t) \right) \tag{7}$$

pour

$$\tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) = \chi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} v_{pq}^{\beta_q} \right) \cdot v_p^{1-\sum_{q \in J_I} \beta_q} > 0$$

et

$$\tilde{m}_p(\mathbb{w}_p) = \psi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} w_{pq}^{\gamma_q} \right) \cdot w_p^{1-\sum_{q \in J_I} \gamma_q} > 0$$

En transformant l'équation (4) et en utilisant la trajectoire du nombre d'employés $L(t) = e^{nt}$ de même que dans le modèle de Nonneman–Vanhoudt, nous obtenons des équations pour la croissance des ressources en capital ultérieures par travailleur :

$$\dot{k}_p(t) = i_p(t) - \mu_p k_p(t)$$

où $\mu_p = \delta_p + n$ désigne le taux de perte du p-ième stock de capital par travailleur (pour chaque $p \in J_I$). À partir de l'équation ci-dessus et de la relation (6), nous obtenons :

$$\forall p \in J_I \quad \dot{k}_p(t) = \tilde{i}_p(\mathbb{w}_p) \cdot \left(\prod_{q \in J_I} k_q^{\beta_q}(t) \right) - \mu_p k_p(t) \tag{8}$$

Le système d'équations différentielles (8) est mathématiquement identique au système d'équations du mouvement du modèle de Nonneman–Vanhoudt. Seule l'interprétation économique des coefficients des produits diffère $\prod_{q\in J_I} k_q^{\beta_q}(t)$. Dans le modèle de Nonneman–Vanhoudt, nous avons des taux d'investissement dans les ressources en capital ultérieures, tandis que dans le modèle de croissance considéré ici, il existe des expressions :

$$\tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) = \chi_p \cdot \left(\prod_{q\in J_I} \nu_{pq}^{\beta_q} \right) \cdot \nu_p^{1-\sum_{q\in J_I}\beta_q}$$

qui dépendent de la combinaison $\mathbb{v}_p$ parts des facteurs de production impliqués dans la production des produits d'investissement ultérieurs et le prix χ_p p-ième produit d'investissement.

Le système d'équations (8) possède un point stationnaire trivial $\mathbb{k}_T = (0, 0, \ldots, 0)$, que nous ignorerons car il n'est pas intéressant d'un point de vue mathématique et économique, et un certain point stationnaire non trivial $\overline{\mathbb{k}} = (\overline{k}_{j_C+1}, \overline{k}_{j_C+2}, \ldots, \overline{k}_{j_C+j_I})$. Point stationnaire non trivial $\overline{\mathbb{k}}$ possède les mêmes propriétés que le point stationnaire non trivial du modèle de croissance multi-capital de Nonneman–Vanhoudt. Par conséquent, nous avons :

$$\forall p \in J_I \quad \ln \overline{k}_p = \ln \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) - \ln \mu_p + \frac{1}{1-\sum_{r\in J_I}\beta_r} \sum_{q\in J_I} \left(\beta_q \left(\ln \tilde{i}_q(\mathbb{v}_p) - \ln \mu_q \right) \right) \qquad (9)$$

En utilisant la fonction de Lyapunov ou le théorème de Grobman-Hartman, on peut démontrer que le point stationnaire non trivial $\overline{\mathbb{k}}$ se caractérise par une stabilité asymptotique (la démonstration, fondée sur la fonction de Lyapunov, se trouve dans les travaux de Dykas et al. (2011, 2023), et sur le théorème de Grobman–Hartman, dans l'ouvrage de Filipowicz et al. (2024)). Ce point détermine donc l'équilibre à long terme du modèle de croissance étudié, tailles $\overline{k}_p$ nous appellerons donc les ressources en capital à long terme par personne active (parce que $k_p(t) \to \overline{k}_p$ auprès de $t \to +\infty$).

L'équation (9) donne ce qui suit : premièrement, le stock à long terme de capital p par personne active $\overline{k}_p$ dépend notamment de la combinaison des actions $\mathbb{v}_p$, intrants de facteurs de production utilisés dans la production d'un produit d'investissement donné, combinaison d'actions $\mathbb{v}_p$ facteurs de production intervenant dans la production d'autres produits d'investissement, à partir du taux de perte d'un stock de capital donné par personne active μ_q et à partir des taux de déclin des autres dépenses d'investissement par personne en activité μ_q (pour $q \neq p$).

Deuxièmement, des actions élevées[5]

$$v_{pj_C+1}, v_{pj_C+2}, \ldots, v_{pj_C+j_I}, v_p\,[v_{qj_C+1}, v_{qj_C+2}, \ldots, v_{qj_C+j_I}, v_q]$$

les facteurs de production impliqués dans la production d'un produit d'investissement donné [autres produits d'investissement] s'accompagnent de valeurs élevées $\overline{k}_p$. L'interaction des composants combinés $\mathbb{v}_p$ i $\mathbb{v}_q$ pour les ressources à long terme $\overline{k}_p$ dans le modèle de croissance économique examiné ici, il est donc analogue à l'impact des taux d'investissement s_p i s_q sur le stock à long terme du capital *p*-ième dans le modèle Nonneman–Vanhoudt.

Troisièmement, comme dans le modèle Nonneman–Vanhoudt, des taux élevés de pertes en capital μ_p et μ_q correspondant à des valeurs faibles $\overline{k}_p$.

Notons par :

$$c = \sum_{p\in J_C} c_p,\ i = \sum_{p\in J_I} i_p \ \text{ et } \ m = \sum_{p\in J_M} m_p$$

(respectivement) les valeurs totales des produits des secteurs de la consommation, de l'investissement et de la défense (toutes par employé). Avec ces notations issues des équations (5–7), nous obtenons :

$$c(t) = \sum_{p\in J_C} c_p(t) = \left(\prod_{q\in J_I} k_q^{\alpha_q}(t)\right)\cdot \sum_{p\in J_C} \tilde{c}_p(\mathbb{u}_p)$$

$$i(t) = \sum_{p\in J_I} i_p(t) = \left(\prod_{q\in J_I} k_q^{\beta_q}(t)\right)\cdot \sum_{p\in J_I} \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p)$$

et

$$m(t) = \sum_{p\in J_M} m_p(t) = \left(\prod_{q\in J_I} k_q^{\gamma_q}(t)\right)\cdot \sum_{p\in J_M} \tilde{m}_p(\mathbb{w}_p)$$

Puisque $t \to +\infty \Rightarrow \mathbb{k}(t) \to \overline{\mathbb{k}}$, par conséquent, à long terme $c(t) \to \overline{c}$, $i(t) \to \overline{i}$ et $m(t) \to \overline{m}$, où :

$$\overline{c} = \left(\prod_{p\in J_I} \overline{k}_p^{\alpha_p}\right)\cdot \sum_{p\in J_C} \tilde{c}_p(\mathbb{u}_p) \Rightarrow \ln \overline{c} = \sum_{p\in J_I} \alpha_p \ln \overline{k}_p + \ln\left(\sum_{p\in J_C} \tilde{c}_p(\mathbb{u}_p)\right)$$

---

[5] Si nous avons une dépendance de type $\ln\ y = f(x_1, x_2)$, où $y, x_1, x_2 > 0$, alors le sens de l'influence des variables indépendantes sur la variable dépendante est déterminé en fonction des signes des dérivées partielles. $\frac{\partial \ln y}{\partial x_p}$ (pour p = 1, 2), car $\frac{\partial \ln y}{\partial x_p} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_p}$, donc $\operatorname{sgn}\frac{\partial \ln y}{\partial x_p} = \operatorname{sgn}\frac{\partial y}{\partial x_p}$.

$$\overline{i} = \left(\prod_{p \in J_I} \overline{k}_p^{\beta_p} \right) \cdot \sum_{p \in J_I} \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) \Rightarrow \ln \overline{i} = \sum_{p \in J_I} \beta_p \ln \overline{k}_p + \ln \left(\sum_{p \in J_I} \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) \right)$$

et

$$\overline{m} = \left(\prod_{p \in J_I} \overline{k}_p^{\gamma_p} \right) \cdot \sum_{p \in J_M} \tilde{m}_p(\mathbb{w}_p) \Rightarrow \ln \overline{m} = \sum_{p \in J_I} \gamma_p \ln \overline{k}_p + \ln \left(\sum_{p \in J_M} \tilde{m}_p(\mathbb{w}_p) \right)$$

ce qui signifie qu'après avoir pris en compte la relation (9), nous obtenons [6]

$$\ln \overline{c}(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \ldots) = \sum_{p \in J_I} \left(\left(\alpha_p + \frac{\beta_p \sum_{q \in J_I} \alpha_q}{1 - \sum_{q \in J_I} \beta_q} \right) \cdot \left(\ln \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) - \ln \mu_p \right) \right) + \ln \left(\sum_{p \in J_C} \tilde{c}_p(\mathbb{u}_p) \right), \quad (10)$$

$$\ln \overline{i}(\mathbb{v}, \ldots) = \frac{1}{1 - \sum_{p \in J_I} \beta_p} \cdot \sum_{p \in J_I} \left(\beta_p \left(\ln \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) - \ln \mu_p \right) \right) + \ln \left(\sum_{p \in J_I} \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) \right) \quad (11)$$

et

$$\ln \overline{m}(\mathbb{v}, \mathbb{w}, \ldots) = \sum_{p \in J_I} \left(\left(\gamma_p + \frac{\beta_p \sum_{q \in J_I} \gamma_q}{1 - \sum_{q \in J_I} \beta_q} \right) \cdot \left(\ln \tilde{i}_p(\mathbb{v}_p) - \ln \mu_p \right) \right) + \ln \left(\sum_{p \in J_M} \tilde{m}_p(\mathbb{w}_p) \right) \quad (12)$$

Les équations (10–12) impliquent ce qui suit: premièrement, la production à long terme par travailleur de tous les biens de consommation $\overline{c}$ dépend, entre autres, de la combinaison $\mathbb{u}$ parts des facteurs impliqués dans le secteur produisant ces produits et parts $\mathbb{v}$ apports de capital et de main-d'œuvre utilisés dans le secteur de l'investissement.

Deuxièmement, les investissements à long terme pour l'employé $\overline{i}$ sont liées au regroupement d'actions $\mathbb{v}$ intrants des facteurs de production utilisés dans ce secteur de l'économie.

Troisièmement, sur $\overline{m}$ les actions incluses dans le regroupement ont un impact $\mathbb{v}$, $\mathbb{w}$.

---

[6] Notation de type $y = y(x_1, x_2, \ldots)$ signifiera que la variable dépendante y est une fonction des variables indépendantes x_1, x_2 et d'autres variables indépendantes (x_3, x_4, ..., x_l), dont l'influence sur la variable y est ignorée à ce stade de l'analyse. Combinaisons $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$, $\mathbb{w}$ décrire les formules $\mathbb{u} = (\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_{j_C})$, $\mathbb{v} = (\mathbb{v}_{j_C+1}, \mathbb{v}_{j_C+2}, \ldots, \mathbb{v}_{j_C+j_I})$ et $\mathbb{w} = (\mathbb{w}_{j_C+j_I+1}, \mathbb{w}_{j_C+j_I+2}, \ldots, \mathbb{w}_j)$. Les composantes de ces combinaisons sont les parts des facteurs de production utilisés dans la production de biens et services de consommation ($\mathbb{u}$), produits d'investissement ($\mathbb{v}$) et produits militaires ($\mathbb{w}$).

Quatrièmement, si les parts des facteurs de production employés dans le secteur de l'investissement (c'est-à-dire les parts incluses dans la combinaison de $\mathbb{v}$), alors les deux valeurs de la consommation à long terme par employé augmentent $\overline{c}$, et les investissements $\overline{i}$ et la production du secteur militaire $\overline{m}$.

Cinquièmement, l'augmentation de la part des facteurs de production employés dans le secteur de consommation [militaire] entraîne une augmentation de la valeur du volume de production global à long terme par travailleur $\overline{c}$ [$\overline{m}$] ce secteur de l'économie.

Sixièmement, parce que les équations d'équilibre doivent être satisfaites

$$\left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_C} u_{pq} + \sum_{p\in J_I} v_{pq} + \sum_{p\in J_M} w_{pq} = 1\right) \wedge \sum_{p\in J_C} u_p + \sum_{p\in J_I} v_p + \sum_{p\in J_M} w_p = 1 \qquad (13)$$

Donc si les actions incluses dans le regroupement (par exemple) augmentent $\mathbb{u}$, alors les actions qui sont des composantes doivent baisser $\mathbb{v}$ et/ou $\mathbb{w}$. Par conséquent, des phénomènes d'éviction des facteurs de production des secteurs de l'investissement et/ou militaires se produiront. De plus, si les facteurs de production sont évincés du secteur de l'investissement par le secteur de la consommation [militaire], cela peut, à long terme, impacter négativement la valeur de la production dans le secteur actif, ce qui freine l'investissement. Si l'investissement est lui-même évincé par les secteurs de la consommation et/ou du secteur militaire, cela limite le rythme d'accumulation de nouvelles ressources en capital, réduisant ainsi la capacité de production de chacun des secteurs économiques étudiés. Par conséquent, tant d'un point de vue théorique que dans le contexte de la politique socio-économique de l'État, l'allocation optimale des facteurs de production entre les secteurs économiques produisant des biens de consommation, d'investissement et militaires est cruciale. Cette allocation optimale sera analysée à partir des règles d'or de l'accumulation du capital et/ou des armements, elles-mêmes inspirées des règles d'or de Phelps.

3. Règles d'or de l'accumulation et/ou du réarmement

La règle d'or de Phelps (1961) en matière d'accumulation de capital est généralement interprétée comme le taux d'investissement $\overline{s}$ dans le modèle de croissance à capital unique de Solow (1956), ou comme la combinaison $(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_N)$ des taux d'investissement dans le modèle de Nonneman–Vanhoudt à N capitaux qui maximisent la consommation à long terme par travailleur. Il est possible de démontrer (cf. Dykas et al., 2023) ou (Filipowicz et al., 2024) que, dans le

modèle de croissance de Solow [Nonneman–Vanhoudt] avec la fonction de production Cobb–Douglas, cette règle s'applique $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$

$$\left[Y = \left(\prod_{j=1}^{N} K_j^{\alpha_i} \right) \cdot L^{1-\sum_{j=1}^{N} \alpha_j} \right]$$

La règle d'or de Phelps en matière d'accumulation est le taux d'investissement $\overline{s} = \alpha$ [combinaison de taux d'investissement $(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \ldots, \overline{s}_N) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$].

Par conséquent, des phénomènes d'éviction se produiront. À l'instar de la règle d'or de l'accumulation du capital de Phelps, définissons la règle d'or de l'accumulation dans le modèle de croissance étudié. Par la règle d'or de l'accumulation, nous entendrons donc une telle combinaison. $(\overline{\mathbb{u}}, \overline{\mathbb{w}})$ la part des facteurs de production utilisés dans les secteurs produisant des biens de consommation et d'investissement qui, pour une combinaison donnée des parts de ces facteurs impliquées dans le secteur militaire, maximise la valeur de la consommation à long terme par travailleur $\overline{c}$ (en particulier, si l'économie est complètement démilitarisée, la combinaison $\mathbb{w}$ peut être $\mathbb{w} = (0, 0, \ldots, 0)$). Par analogie avec la règle d'or de l'accumulation, nous définissons la règle d'or du renforcement comme une combinaison $(\overline{\mathbb{v}}, \overline{\mathbb{v}})$ à part des facteurs de production utilisés dans les secteurs produisant des biens d'investissement et des biens militaires qui maximise la valeur de la production à long terme du secteur militaire par employé, pour une combinaison donnée $\mathbb{u}$ parts de capital et de ressources humaines employées dans le secteur qui produit des biens et services de consommation.

De toute évidence, pour déterminer la règle d'or de l'accumulation du capital et la règle d'or des armements, les équations d'équilibre (13) doivent être satisfaites. On en conclut que, mathématiquement parlant, déterminer la règle d'or de l'accumulation [la règle d'or des armements] revient à trouver le maximum conditionnel de la fonction $\overline{c}(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \ldots)$ $[\overline{m}(\mathbb{v}, \mathbb{w}, \ldots)]$ lorsque limité par ces équations.

Alors, la règle d'or de l'accumulation du capital et des armements (cf. Filipowicz et al., 2025) est une synthèse de la règle d'or de l'accumulation du capital et de la règle d'or des armements précédemment définies. Cependant, pour définir cette règle, il est nécessaire d'introduire au préalable le concept de fonction d'utilité sociale à long terme de la consommation par travailleur et de la production du secteur militaire par travailleur. La fonction d'utilité sociale est donnée par la formule suivante :

$$\Omega(\overline{c}, \overline{m}) = \overline{c}^{\sigma} \overline{m}^{1-\sigma} \tag{14}$$

où $\sigma \in (0, 1)$. La fonction (14) représente mathématiquement la moyenne géométrique pondérée de la consommation à long terme par travailleur $\overline{c}$ et la production militaire par travailleur $\overline{m}$ avec des poids de σ et $1 - \sigma$. Ces pondérations représentent, d'un point de vue économique, les élasticités de la fonction d'utilité sociale par rapport (respectivement) à la consommation et à la production par employé du secteur militaire à long terme. De plus, si un niveau élevé $\overline{c}$ [$\overline{m}$] nous la considérerons comme une quantification de la prospérité [sécurité], c'est de la flexibilité $\sigma > \frac{1}{2}\left[\sigma < \frac{1}{2}\right]$ cela signifie que la société privilégie la prospérité à long terme (sécurité) à la sécurité (prospérité). Dans les cas extrêmes, c'est-à-dire lorsque $\sigma \to 0^+$ ou $\sigma \to 0^-$, nous analysons soit une économie qui privilégie la sécurité à long terme au détriment de la prospérité, soit une économie qui privilégie uniquement la prospérité à long terme. Dans le premier cas, la règle d'or de l'accumulation et du réarmement est identique à la règle d'or des armements, tandis que dans le second, elle correspond à la règle d'or de l'accumulation du capital.

Prenons les fonctions auxiliaires $z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \ln \overline{c}(\mathbb{u}, \mathbb{v}, ,...)$ et $z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w}) = \ln \overline{m}(\mathbb{v}, \mathbb{w}, ,...)$. La fonction d'utilité sociale (14) peut alors être réduite à la fonction donnée par la formule $\Omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}) = \exp(\sigma z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) + (1 - \sigma)\, z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w}))$, et la recherche du maximum de cette fonction sous la contrainte des équations (13) revient à maximiser la fonction $\omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}) = \ln \Omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w})$, que nous pouvons écrire comme suit :

$$\omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}) = \sigma z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) + (1 - \sigma)\, z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w}) \tag{15}$$

avec la limitation mentionnée.

D'après les équations (10) et (12), les fonctions $z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v})$ et $z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w})$ décrire les relations

$$z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = P_c + \sum_{p \in J_I}\left(\left(\alpha_p + \frac{\beta_p S_\alpha}{1 - S_\beta}\right)\cdot\left(\ln \chi_p + (1 - S_\beta)\ln \nu_p + \sum_{q \in J_I} \beta_q \ln \nu_{pq}\right)\right) + \\ + \ln\left(\sum_{p \in J_C} \phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{pq}^{\alpha_q}\right)\cdot u_p^{1 - S_\alpha}\right) \tag{16}$$

et

$$z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w}) = P_m + \sum_{p \in J_I}\left(\left(\gamma_p + \frac{\beta_p S_\gamma}{1 - S_\beta}\right)\cdot\left(\ln \chi_p + (1 - S_\beta)\ln \nu_p + \sum_{q \in J_I} \beta_q \ln \nu_{pq}\right)\right) + \\ + \ln\left(\sum_{p \in J_M} \psi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} w_{pq}^{\gamma_q}\right)\cdot w_p^{1 - \sum_{q \in J_I} \gamma_q}\right) \tag{17}$$

où $S_\alpha = \sum_{q \in J_I} \alpha_q$, $S_\beta = \sum_{q \in J_I} \beta_q$ et $S_\gamma = \sum_{q \in J_I} \gamma_q$ désignent les sommes des élasticités de la fonction de production dans les secteurs produisant (respectivement) des produits de consommation (S_α), investissement (S_β) et militaires (S_γ), par contre P_c, P_m – certaines quantités indépendantes de la combinaison ($\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$, $\mathbb{w}$).

Fonction de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}, \ell, \lambda_L)$, où $\ell = (\lambda_{j_C+1}, \lambda_{j_C+2}, \ldots, \lambda_{j_C+j_I})$, pour un tel problème donné décrit la relation :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}, \ell, \lambda_L) = \sigma z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) + (1-\sigma) z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w}) + \\ + \sum_{q \in J_I} \lambda_q \left(\sum_{p \in J_C} u_{pq} + \sum_{p \in J_I} v_{pq} + \sum_{p \in J_M} w_{pq} - 1 \right) + \\ + \lambda_L \left(\sum_{p \in J_C} u_p + \sum_{p \in J_I} v_p + \sum_{p \in J_M} w_p - 1 \right)\end{aligned} \tag{18}$$

par lequel ℓ désigne une combinaison de multiplicateurs de Lagrange indéterminés correspondant aux équations suivantes équilibrant la distribution des ressources en capital, et λ_L – le multiplicateur de Lagrange indéfini accompagnant l'équation équilibrant la répartition des facteurs de travail.

Parce que la fonction $\omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}) = \sigma z_c(\mathbb{u}, \mathbb{v}) + (1 - \sigma)\, z_m(\mathbb{v}, \mathbb{w})$ est strictement concave, donc au point où les conditions nécessaires de l'extrémum conditionnel examiné sont satisfaites, il existe un maximum de la fonction $\omega(\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w})$.

Les conditions nécessaires à l'existence de l'extremum conditionnel étudié décrivent les relations :

$$\forall q \in J_I \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{pq}} = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}} + \lambda_q = 0 \Rightarrow -\lambda_q = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}} \tag{19}$$

$$\forall p \in J_C \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_p} = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial u_p} + \lambda_L = 0 \Rightarrow -\lambda_L = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial u_p}, \tag{20}$$

$$\forall q \in J_I \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{pq}} = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial v_{pq}} + (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial v_{pq}} + \lambda_q = 0 \Rightarrow -\lambda_q = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial v_{pq}} + (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial v_{pq}} \tag{21}$$

$$\forall p \in J_I \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_p} = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial v_p} + (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial v_p} + \lambda_L = 0 \Rightarrow -\lambda_L = \sigma \frac{\partial z_c}{\partial v_p} + (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial v_p} \tag{22}$$

$$\forall q \in J_I \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{pq}} = (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial w_{pq}} + \lambda_q = 0 \Rightarrow -\lambda_q = (1-\sigma) \frac{\partial z_m}{\partial w_{pq}} \tag{23}$$

$$\forall p \in J_M \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_p} = (1-\sigma)\frac{\partial z_m}{\partial w_p} + \lambda_L = 0 \Rightarrow -\lambda_L = (1-\sigma)\frac{\partial z_m}{\partial w_p} \tag{24}$$

et pour tous $q \in J_I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_q} = 0$, mais aussi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_L} = 0$, ce qui conduit aux équations d'équilibre (13). Dérivées partielles $\frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}}, \frac{\partial z_c}{\partial u_p}$ (pour tous $q \in J_I \wedge p \in J_C$) satisfaient aux exigences suivantes

$$\frac{u_{pq}}{\alpha_q} \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}} = \frac{\phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_p^{1-S_\alpha}}{\sum_{r \in J_C} \phi_r \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{rq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_r^{1-S_\alpha}}$$

$$\frac{u_p}{1-S_\alpha} \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_p} = \frac{\phi_p \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{pq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_p^{1-S_\alpha}}{\sum_{r \in J_C} \phi_r \cdot \left(\prod_{q \in J_I} u_{rq}^{\alpha_q} \right) \cdot u_r^{1-S_\alpha}}$$

Donc $\frac{\sum_{p \in J_C} u_{pq} \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}}}{\alpha_q} = 1$ oraz $\frac{\sum_{p \in J_C} u_p \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_p}}{1-S_\alpha} = 1$, ce qui provoque l'égalité

$$\forall q \in J_I \quad \sum_{p \in J_C} u_{pq} \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}} = \alpha_q \wedge \sum_{p \in J_C} u_p \cdot \frac{\partial z_c}{\partial u_p} = 1 - S_\alpha \tag{25}$$

Des conditions nécessaires (19–20), il découle que $\frac{\partial z_c}{\partial u_{pq}} = -\frac{\lambda_q}{\sigma} \wedge \frac{\partial z_c}{\partial u_p} = -\frac{\lambda_L}{\sigma}$, par conséquent, en insérant les équations ci-dessus dans la formule (25), on obtient les relations suivantes :

$$\forall q \in J_I \quad \sum_{p \in J_C} u_{pq} = -\frac{\sigma \alpha_q}{\lambda_q} \wedge \sum_{p \in J_C} u_p = -\frac{\sigma(1-S_\alpha)}{\lambda_L} \tag{26}$$

Procéder de manière analogue avec les dérivés $\frac{\partial z_m}{\partial w_{pq}}, \frac{\partial z_m}{\partial w_p}$ et les conditions (23–24) que nous avons :

$$\forall q \in J_I \quad \sum_{p \in J_M} w_{pq} = -\frac{(1-\sigma)\gamma_q}{\lambda_q} \wedge \sum_{p \in J_M} w_p = -\frac{(1-\sigma)(1-S_\gamma)}{\lambda_L}. \tag{27}$$

Parce que

$$\forall q \in J_I \quad \frac{\partial z_c}{\partial v_{pq}} = \frac{\left(\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha\right)\beta_q}{(1-S_\beta)v_{pq}} \wedge \frac{\partial z_c}{\partial v_p} = \frac{\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha}{v_p}$$

et

$$\forall q \in J_I \quad \frac{\partial z_m}{\partial v_{pq}} = \frac{\left(\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma\right)\beta_q}{(1-S_\beta)v_{pq}} \wedge \frac{\partial z_m}{\partial v_p} = \frac{\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma}{v_p}$$

et d'après les conditions (21–22), nous avons

$$-\lambda_q = \sigma\frac{\partial z_c}{\partial v_{pq}} + (1-\sigma)\frac{\partial z_m}{\partial v_{pq}} \wedge -\lambda_L = \sigma\frac{\partial z_c}{\partial v_p} + (1-\sigma)\frac{\partial z_m}{\partial v_p}$$

donc pour tout $p, q \in J_I$ les équations sont valides :

$$-\lambda_q = \beta_q \frac{\sigma\left(\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha\right)+(1-\sigma)\left(\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma\right)}{(1-S_\beta)v_{pq}} \wedge$$

$$-\lambda_L = \frac{\sigma\left(\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha\right)+(1-\sigma)\left(\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma\right)}{v_p}$$

À partir des relations ci-dessus, nous obtenons :

$$v_{pq} = -\frac{\beta_q}{\lambda_q}\cdot\frac{\sigma\left(\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha\right)+(1-\sigma)\left(\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma\right)}{(1-S_\beta)} \wedge$$

$$\wedge\, v_p = -\frac{\sigma\left(\alpha_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\alpha\right)+(1-S_\beta)\left(\gamma_p(1-S_\beta)+\beta_p S_\gamma\right)}{\lambda_L}$$

ce qui nous fait que nous avons :

$$\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_I} v_{pq} = -\frac{\beta_q}{\lambda_q}\cdot\frac{\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma}{(1-S_\beta)} \wedge \sum_{p\in J_I} v_p = -\frac{\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma}{\lambda_L} \qquad (28)$$

En insérant les relations (26–28) dans les équations de bilan (13), on obtient :

$$\forall q \in J_I \quad -\frac{\sigma\alpha_q}{\lambda_q} - \frac{\beta_q}{\lambda_q}\cdot\frac{\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma}{(1-S_\beta)} - \frac{(1-\sigma)\gamma_q}{\lambda_q} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda_q = \frac{\sigma\alpha_q(1-S_\beta)+\beta_q\left(\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma\right)+(1-\sigma)\gamma_q(1-S_\beta)}{1-S_\beta}$$

et

$$-\frac{\sigma(1-S_\beta)}{\lambda_L}-\frac{\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma}{\lambda_L}-\frac{(1-\sigma)(1-S_\beta)}{\lambda_L}=1\Rightarrow-\lambda_L=1$$

Après avoir inséré les multiplicateurs de Lagrange calculés dans les relations (26–28), on obtient l'égalité :

$$\forall q\in J_I\quad\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}=\frac{\sigma\alpha_q(1-S_\alpha)}{Q_q(\sigma,\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,S_\alpha,S_\beta,S_\gamma)}\wedge\sum_{p\in J_C}\overline{u}_p=\sigma(1-S_\alpha)\qquad(29)$$

$$\forall q\in J_I\quad\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}=\frac{(1-\sigma)\gamma_q(1-S_\alpha)}{Q_q(\sigma,\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,S_\alpha,S_\beta,S_\gamma)}\wedge\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p=(1-\sigma)(1-S_\alpha)\quad(30)$$

et:

$$\forall q\in J_I\quad\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}=\frac{\beta_q\left(\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma\right)}{Q_q(\sigma,\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,S_\alpha,S_\beta,S_\gamma)}\wedge\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p=\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma\quad(31)$$

où

$$Q_q(\sigma,\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,S_\alpha,S_\beta,S_\gamma)=$$
$$=\sigma\alpha_q(1-S_\beta)+\beta_q\left(\sigma S_\alpha+(1-\sigma)S_\gamma\right)+(1-\sigma)\gamma_q(1-S_\beta)>0$$

Les formules (29–31) déterminent les parts de référence des facteurs de production de capital et de travail impliqués (respectivement) dans le secteur des biens de consommation. ($\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\wedge\sum_{p\in J_C}\overline{u}_p$), investissement ($\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\wedge\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p$) et militaires ($\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\wedge\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p$). Les conclusions suivantes peuvent être tirées de ces équations.

Premièrement, la part totale[7] $\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}$. Les dépenses du stock de capital q investi dans le secteur produisant des biens et services de consommation, conformément à la règle d'or de l'accumulation et des armements, dépendent de σ, α_q, β_q, γ_q et α_r, β_r i γ_r (pour $r\in J_I\wedge r\neq q$). Signes des dérivées partielles[8]

[7] Si le contexte le permet, nous omettrons le quantificateur général $\forall$ dans les conclusions verbales suivantes.

[8] Estimation des signes des dérivées partielles

$$\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq},\sum_{p\in J_C}\overline{v}_{pq},\sum_{p\in J_C}\overline{w}_{pq},\sum_{p\in J_C}\overline{u}_p,\sum_{p\in J_C}\overline{v}_p,\sum_{p\in J_C}\overline{w}_p$$

au respect de α_q, β_q, γ_q, α_r, β_r i γ_r (pour $r\neq q$) il ne faut pas oublier, que

$$S_\alpha=\sum_{r\in J_I}\alpha_r,S_\beta=\sum_{r\in J_I}\beta_r\text{ et }S_\gamma=\sum_{r\in J_I}\gamma_r.$$

Tableau 1. Signes des dérivées partielles $\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}$, $\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{w}_{pq}\right)}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial x}$

x	$\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}$	$\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\right)}{\partial x}$	$\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial x}$
σ	+	–	ambiguë
α_q	+	–	–
β_q	–	–	+
γ_q	–	+	–
α_r	–	–	+
β_r	+	–	–
γ_r	–	–	+

La fonction sgn x du tableau 1 (pour plus de clarté) est définie comme $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} - & \forall x < 0 \\ 0 & \Leftarrow \quad x = 0 \\ + & \forall x > 0 \end{cases}$

Source: calculs propres.

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}$$

(où x désigne les variables indépendantes ultérieures influençant la part $\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}$) sont répertoriés dans le tableau 1 (les signes y sont également inclus)

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\right)}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial x}$$

nous y reviendrons dans les conclusions suivantes)[9].

Les signes des dérivées partielles sont indiqués dans le tableau 1 :

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}$$

[9] Nous ne fournissons pas d'équations décrivant les dérivées partielles listées dans le tableau 1 pour deux raisons. Premièrement, ces dérivées sont des quotients assez complexes de fonctions de variables expliquant les contributions à la règle d'or $\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}$, $\sum_{p\in J_C}\overline{v}_{pq}$ et $\sum_{p\in J_C}\overline{v}_{pq}$. Deuxièmement, du point de vue des conclusions économiques, les signes des dérivées (résultant de ces équations) sont plus importants que les équations décrivant les dérivées mentionnées.

mènent à la conclusion que la règle d'or partage $\sum_{p\in J_C} \overline{u}_p$ (les dépenses du q-ième capital employé dans le secteur produisant des biens et services de consommation) sont plus élevées, plus l'élasticité σ de la fonction d'utilité sociale par rapport à la consommation à long terme par employé est élevée α_q fonction de production des producteurs de biens et services de consommation en fonction du q-ième facteur de production de capital et de l'élasticité β_r la fonction de production dans le secteur de l'investissement par rapport aux intrants d'autres ressources en capital et les valeurs d'élasticité les plus faibles β_q fonction de production dans le secteur producteur d'investissements, flexibilité α_r fonction de production dans le secteur de la consommation et chacune des élasticités γ_r (c'est-à-dire, également γ_q) fonction de production dans le secteur militaire.

Deuxièmement, la part totale $\sum_{p\in J_C} \overline{u}_p$ plus l'élasticité de la fonction d'utilité sociale σ est élevée, et plus les élasticités sont faibles, plus les facteurs de main-d'œuvre utilisés par les producteurs de biens et services de consommation sont importants α_r (dla $r \in J_I$) fonction de production des producteurs de biens et services destinés aux consommateurs.

Troisièmement, dans les cas extrêmes, c'est-à-dire lorsque $\sigma \to 0^+$ ou $\sigma \to 1^-$, des relations se produisent

$$\sigma \to 0^+ \Rightarrow \left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_C} \overline{u}_{pq} \to 0 \wedge \sum_{p\in J_C} \overline{u}_p \to 0 \right)$$

et

$$\sigma \to 1^- \Rightarrow \left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_C} \overline{u}_{pq} \to \frac{\alpha_q(1-S_\beta)}{\alpha_q(1-S_\beta)+\beta_q S_\alpha} \wedge \sum_{p\in J_C} \overline{u}_p \to 1-S_\alpha \right)$$

Donc si la société ne valorise que la sécurité ($\sigma \to 0^+$), ce sont des actions $\sum_{p\in J_C} \overline{u}_{pq}, \sum_{p\in J_C} \overline{u}_p$ les intrants de capital et de travail affectés au secteur des biens de consommation convergent vers 0, ce qui entraîne une diminution de la production de ce secteur, c'est-à-dire que la société vit dans une extrême pauvreté $\overline{c} \to 0$. Toutefois, dans le cas où seul le bien-être est valorisé ($\sigma \to 1^-$) consommation à long terme par travailleur $\overline{c}$ atteint alors son niveau maximal possible. Elle fonctionne ensuite selon la règle d'or de l'accumulation du capital, bien que (comme on le verra bientôt) elle soit totalement vulnérable.

Quatrièmement, la règle d'or partage $\sum_{p\in J_M} \overline{w}_{pq}$ les dépenses d'investissement du secteur militaire dépendent des mêmes variables que les parts analogues de capital employées dans le secteur produisant des biens et services de consommation. Le tableau 1 montre également que, dans le cas de l'élasticité σ

de la fonction d'utilité sociale et de l'élasticité β_q, α_r et γ_r fonctions de production considérées

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}=-\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\right)}{\partial x}$$

par conséquent, ces variables influencent la part des ressources en capital allouées au secteur militaire dans le sens inverse de la part de ces ressources engagées dans le secteur produisant des biens et services de consommation. Dans d'autres cas,

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}\right)}{\partial x}=\operatorname{sgn}\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\right)}{\partial x}$$

(c'est-à-dire élasticités β_q, α_r et γ_r affectent les actions $\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}$ et $\sum_{p\in J_C}\overline{u}_{pq}$ dans la même direction).

Cinquièmement, une élasticité σ élevée de la fonction d'utilité sociale et/ou une somme élevée S_γ la flexibilité de la fonction de production dans le secteur militaire s'accompagne d'une faible valeur de la somme des départements $\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p$ charge de travail destinée aux producteurs de biens et services militaires.

Sixièmement, aux valeurs extrêmes de l'élasticité σ de la fonction d'utilité sociale, il existe des relations :

$$\sigma\to 0^+\Rightarrow\left(\forall q\in J_I\quad\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\to\frac{\gamma_q(1-S_\beta)}{\beta_q S_\gamma+\gamma_q(1-S_\beta)}\wedge\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p\to 1-S_\gamma\right)$$

et

$$\sigma\to 1^-\Rightarrow\left(\forall q\in J_I\quad\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\to 0\wedge\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p\to 0\right)$$

La conclusion est que, dans le premier cas susmentionné, l'économie atteint la règle d'or des armements, la production par secteur militaire opérationnel atteignant sa valeur maximale. Dans le second cas, il s'agit de la règle d'or de l'accumulation du capital. De plus, si $\sum_{p\in J_M}\overline{w}_{pq}\to 0\wedge\sum_{p\in J_M}\overline{w}_p\to 0$, alors les intrants de facteurs de production dans le secteur militaire et (par conséquent) la production de ce secteur tombent à 0, ce qui rend l'économie complètement sans défense.

Septièmement, parce que

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial\sigma}=\beta_q(1-S_\beta)\frac{\gamma_q S_\alpha-\alpha_q S_\gamma}{Q_q^2(\sigma,\alpha_q,\beta_q,\gamma_q,S_\alpha,S_\beta,S_\gamma)}$$

donc si le quotient d'élasticité γ_q/α_q est supérieur [inférieur] au rapport S_γ/S_α somme des élasticités de la fonction de production Cobb–Douglas, alors :

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial\sigma}>0\left[\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}\right)}{\partial\sigma}<0\right]$$

donc une élasticité σ élevée de la fonction d'utilité sociale correspond à une somme élevée [faible] $\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}$ part des dépenses d'investissement consacrées au secteur produisant des produits d'investissement.

Huitièmement, faible [élevée] élasticités α_q, γ_q, β_r [β_q, α_r, γ_r] indiquent les valeurs élevées de la somme des actions $\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}$.

Neuvièmement, plus les élasticités de la fonction de production sont élevées dans les secteurs de la consommation et de la défense, ce qui se traduit par des sommes importantes S_α i S_γ ces flexibilités, y compris la somme d'actions de la règle d'or $\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p$ le taux de main-d'œuvre utilisé par les producteurs d'investissement est plus élevé.

Dixièmement, parce que de la relation (31) découle que :

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p\right)}{\partial\sigma}=S_\alpha-S_\gamma$$

par conséquent, si la somme S_α sera supérieur [inférieur] à la somme S_γ, donc :

$$\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p\right)}{\partial\sigma}>0\left[\frac{\partial\left(\sum_{p\in J_I}\overline{v}_p\right)}{\partial\sigma}<0\right]$$

ce qui signifie que la forte élasticité σ de la fonction d'utilité sociale s'accompagne d'une somme élevée [faible] des parts des intrants de travail dirigés vers les producteurs de produits d'investissement.

Onzièmement, selon la règle d'or des armements [règle d'or de l'accumulation du capital], la somme des parts des dépenses de capital $\sum_{p\in J_I}\overline{v}_{pq}$ et travail

$\sum_{p\in J_I} \overline{v}_p$ impliqué dans la production de produits d'investissement décrit la relation :

$$\sigma \to 0^+ \Rightarrow \left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_I} \overline{v}_{pq} \to \frac{\beta_q S_\gamma}{\gamma_q (1-S_\beta) + \beta_q S_\gamma} \wedge \sum_{p\in J_I} \overline{v}_p \to S_\gamma \right)$$

et

$$\left[\sigma \to 1^- \Rightarrow \left(\forall q \in J_I \quad \sum_{p\in J_I} \overline{v}_{pq} \to \frac{\beta_q S_\alpha}{\alpha_q (1-S_\beta) + \beta_q S_\alpha} \wedge \sum_{p\in J_I} \overline{v}_p \to S_\alpha \right) \right]$$

Conclusion

Dans cet article, nous analysons l'allocation optimale des facteurs de production (capital et travail) entre les secteurs de la consommation, de l'investissement et de la défense, en combinant le modèle à deux secteurs d'Uzawa, l'approche multicapital de Nonneman–Vanhoudt et l'inclusion du secteur militaire. Modélisée par des fonctions Cobb–Douglas étendues, cette économie multiproduits possède un point stationnaire asymptotiquement stable et non trival.

L'analyse de l'équilibre à long terme montre qu'une augmentation de la part des facteurs allouée au secteur de l'investissement stimule la production par travailleur dans l'ensemble des trois secteurs. À l'inverse, l'expansion des secteurs de la consommation ou militaire engendre des effets d'éviction qui déplacent les ressources du secteur de l'investissement, ce qui freine le rythme d'accumulation du capital et réduit, à long terme, la capacité de production globale de l'économie.

Pour résoudre ce dilemme, nous introduisons une fonction d'utilité sociale combinant la prospérité (consommation) et la sécurité (production militaire). Les règles d'or dérivées de ce modèle indiquent les propriétés suivantes :

– Priorité exclusive à la sécurité ($\sigma \to 0^+$) :

  Les parts de capital et de travail allouées au secteur civil tendent vers zéro, plongeant la société dans une extrême pauvreté.

  - Priorité exclusive au bien-être ($\sigma \to 1^-$) : La consommation à long terme atteint son niveau maximal possible, mais le secteur militaire s'effondre, rendant l'économie totalement sans défense.
  - Sensibilité aux élasticités : La part optimale du capital dans le secteur militaire varie dans le sens inverse de celle du secteur de la consommation face aux changements de l'élasticité de l'utilité sociale et des élasticités

sectorielles directes de la production. De plus, des élasticités de substitution plus élevées de la fonction de production dans les secteurs civil et de défense augmentent la part optimale du travail allouée au secteur de l'investissement.

Les auteurs tiennent à remercier Mme Samia Al Kaakour pour ses conseils concernant la traduction de l'article en français.

References

Alptekin, A., & Levine, P. (2012). Military expenditure and economic growth: A meta-analysis. *European Journal of Political Economy*, *28*(4), 636–650.

Barro, R. J. (1990). Government spending in a simple model of endogenous growth. *Journal of Political Economy*, *98*(5, part 2), 103–125.

Barro, R. J. (1991). Economic growth in a cross section of countries. *Quarterly Journal of Economics*, *106*(2), 407–443.

Benoît, E. (1973). *Defense and economic growth in developing countries*. Lexington Books.

Benoît, E. (1978). Growth and defense in developing countries. *Economic Development and Cultural Change*, *26*(2), 271–280.

Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, *18*, 139–165.

Deger, S., & Smith, R. (1983). Military expenditure and growth in less developed countries. *Journal of Conflict Resolution*, *27*(2), 335–353.

Dunne, J. P., Smith, R. P., & Willenbockel, D. (2005). Models of military expenditure and growth: A critical review. *Defence and Peace Economics*, *16*(6), 449–461.

Dunne, J. P., & Tian, N. (2013). Military expenditure and economic growth: A survey. *Economics of Peace and Security Journal*, *8*(1), 5–11.

Dunne, J. P., & Tian, N. (2015). Military expenditure, economic growth and heterogeneity. *Defence and Peace Economics*, *26*(1), 15–31.

Dykas, P., Edigarian, A., & Tokarski, T. (2011). Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana–Vanhoudta. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu*, *176*, 161–177.

Dykas, P., Tokarski, T., & Wisła, R. (2023). *The Solow model of economic growth: Application to contemporary macroeconomic issues*. Routledge.

Feder, G. (1982). On exports and economic growth. *Journal of Development Economics*, *12*, 59–73.

Filipowicz, K., Krawiec, A., Połeć, A., & Tokarski, T. (2025, November 4–6). *Golden rules of capital accumulation and golden rules of armaments*. Macromodels International Conference. Toruń. Polska. https://macromodels.pan.pl

Filipowicz, K., Krawiec, A., Połeć, A., & Tokarski, T. (2026). *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego* (t. 2). Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Filipowicz, K., & Krawiec, A., & Tokarski, T. (2024). *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego* (t. 1). Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Filipowicz, K., Krawiec, A., & Tokarski, T. (2025). War and economic growth: An analysis based on extended Solow model. *Defence and Peace Economics*, *36*(6), 825–839. https://doi.org/10.1080/10242694.2024.2435280

Heo, U., & Ye, M. (2016). Defense spending and economic growth around the globe: The direct and indirect link. *International Interactions*, *42*(5), 774–796.

Hicks, J. R. (1937). Mr. Keynes and the "Classics": A suggested interpretation. *Econometrica*, *5*(2), 147–159.

Hou, N., & Chen, B. (2013). Military expenditure and economic growth in developing countries: Evidence from system GMM estimates. *Defence and Peace Economics*, *24*(3), 183–193.

Kurt, S. (2015). Government health expenditures and economic growth: A Feder–Ram approach for the case of Turkey. *International Journal of Economics and Financial Issues*, *5*(2), 441–447.

Malizard, J. (2015). Does military expenditure crowd out private investment? A disaggregated perspective for the case of France. *Economic Modelling*, *46*, 44–52.

Malizard, J. (2016). Military expenditure and economic growth in the European Union: Evidence from SIPRI's extended dataset. *Economics of Peace and Security Journal*, *11*(2), 38–44.

Malizard, J. (2020). L'impact économique de la défense: une approche globale. *Revue Défense Nationale*, *832*, 43–48.

Mylonidis, N. (2008). Revisiting the nexus between military spending and growth in the European Union. *Defence and Peace Economics*, *19*(4), 265–272.

Nonneman, W., & Vanhoudt, P. (1996). A further augmentation of the Solow model and the empirics of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, *111*, 943–953.

Phelps, E. S. (1961). The golden rule of accumulation: A fable for growthmen. *American Economic Review*, *51*(4), 638–643.

Ram, R. (1986). Government size and economic growth: A new framework and some evidence from cross-section and time-series data. *American Economic Review*, *76*(1), 191–203.

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, *70*(1), 65–94.

Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *Review of Economics and Statistics*, *39*(3), 312–320.

Uzawa, H. (1961). On a two-sector model of economic growth. *Review of Economic Studies*, *29*, 40–47.

Uzawa, H. (1963). On a two-sector model of economic growth II. *Review of Economic Studies*, *30*, 105–118.