

Emil Panek

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki
Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej
emil.panek@ue.poznan.pl

NIESTACJONARNY MODEL VON NEUMANNA Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Streszczenie: W zdecydowanej większości prac z teorii magistral rozpatruje się stacjonarną gospodarkę ze stałą (niezmienna w czasie) technologią. Bardzo nieliczne są próby wyjścia poza „zakłęty krąg” stacjonarności i prześledzenia tzw. efektu magistrali w niestacjonarnej gospodarce Neumanna-Gale’a ze zmienną technologią. Zadanie to podjęto w artykule, w którym zaprezentowano „słabą” i „bardzo silną” wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej.

Słowa kluczowe: niestacjonarny model von Neumanna, technologia graniczna, „słabe” i „bardzo silne” twierdzenie o magistrali.

Klasyfikacja JEL: C10.

Wstęp

Aczkolwiek największe zainteresowanie ekonomistów matematycznych modelami von Neumanna-Gale’a i tzw. równowagą neumannowską przypada na drugą połowę XX wieku (por. obszerną bibliografię w pracy Panka [2011]), do chwili obecnej raz po raz pojawiają się nowe, wartościowe prace na ten temat (zob. np. Khan i Piazza [2011a, b], Khan i Zaslavski [2010], Zaslavski [2006]). Ich autorzy w zdecydowanej większości zajmują się różnymi wariantami stacjonarnej gospodarki ze stałą (niezmienną w czasie) technologią. Do bardzo nielicznych należą próby wyjścia poza „zakłęty krąg” stacjonarności i prześledzenia tzw. efektu magistrali w niestacjonarnej gospodarce typu von Neumanna-Gale’a ze zmienną technologią [Gantz 1980; Joshi 1997; Keeler 1972]. Zadanie to podejmujemy w artykule.

Nawiązując do pracy Panka [2011] oraz pracy Panka i Runki [2012] prezentujemy „słabą” i „bardzo silną” wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z technologią zbieżną do pewnej technologii granicz-

nej. Rolę kryterium wzrostu gra wartość (mierzonej w cenach równowagi von Neumanna) produkcji wytworzonej w końcowym okresie ustalonego horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$.

Obowiązują oznaczenia z pracy Panka [2011].

1. Podstawowe założenia

Zakładamy, że czas t zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \dots, t_1$. Okres końcowy t_1 informuje o długości horyzontu T . W gospodarce zużywa się i/lub wytwarza n towarów. Liczba n nie zmienia się w czasie, choć nie znaczy to, że w dowolnym okresie t wszystkie towary muszą być zużywane i/lub wytwarzane. Natomiast w każdym okresie możliwości wytwórcze gospodarki determinuje technologia produkcji, utożsamiana z pewną liczbą m tzw. bazowych procesów technologicznych tworzących wiersze neumannowskich macierzy nakładów (zużycia)

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

i wyników (produkcji)

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}(t) & b_{m2}(t) & \dots & b_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

Liczba m bazowych procesów technologicznych nie zmienia się w czasie. Wiersz $a_j(t) = (a_{j1}(t), a_{j2}(t), \dots, a_{jn}(t))$ macierzy $A(t)$ nazywamy wektorem nakładów (zużycia), a wiersz $b_j(t) = (b_{j1}(t), b_{j2}(t), \dots, b_{jn}(t))$ macierzy $B(t)$ wektorem wyników (produkcji), którą można wytworzyć w okresie t , stosując j -ty bazowy proces technologiczny z jednostkową intensywnością. Element $a_{ji}(t) \geq 0$ wskazuje na wielkość zużycia i -tego towaru w j -tym bazowym procesie technologicznym (prowadzonym z jednostkową intensywnością) w okresie t . Podobnie skalar $b_{ji}(t)$ informuje o wielkości produkcji i -tego towaru w okresie t w j -tym bazowym procesie technologicznym (prowadzonym z jednostkową intensywnością).

O neumannowskich macierzach nakładów $A(t)$ i wyników $B(t)$ zakładamy, że są określone dla $t = 0, 1, \dots$ oraz

(N1) $\lim_t A(t) = A \geq 0$ i każdy wiersz macierzy $A(t)$, A zawiera element dodatni (w każdym bazowym procesie technologicznym zużywany jest co najmniej jeden towar), $\lim_t B(t) = B$ i każda kolumna macierzy $B(t)$, B zawiera element dodatni (każdy towar jest wytwarzany w co najmniej jednym bazowym procesie technologicznym);

(N2) wśród bazowych procesów technologicznych $(a_j(t), b_j(t))$, $j = 1, \dots, m$, są procesy postaci $(e_k, 0) = ((0, \dots, 1, \dots, 0), (0, \dots, 0))$, $k = 1, \dots, n$, (warunek dopuszczający możliwość marnotrawstwa nakładów i/lub mocy produkcyjnych). Ponieważ $\lim_t A(t) = A$ oraz $\lim_t B(t) = B$, więc także graniczne macierze A , B zawierają wiersze postaci $(e_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Z warunku (N2) wynika, że liczba bazowych procesów produkcyjnych jest większa od liczby towarów: $m > n$. O macierzach $A(t)$, $B(t)$ mówimy, że opisują technologię produkcji w gospodarce von Neumanna w okresie t , natomiast o macierzach A , B – że opisują technologię graniczną w gospodarce von Neumanna. Model jest liniowy w tym sensie, że jeżeli przez v oznaczymy nieujemny m -wymiarowy (wierszowy) wektor intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych w okresie t , to w gospodarce z technologią $A(t)$, $B(t)$ z wektora nakładów

$$x(t) = vA(t) = \sum_{j=1}^m v_j a_j(t) \text{ można otrzymać wektor produkcji } y(t) = vB(t) = \sum_{j=1}^m v_j b_j(t).$$

Podobnie w gospodarce z technologią graniczną A , B z nakładów vA otrzymujemy wektor produkcji vB .

O każdej parze $(x(t), y(t)) = (vA(t), vB(t))$ z dowolnym wektorem $v \geq 0$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces produkcji w okresie t w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna ze zmienną technologią. Natomiast o parze $(x, y) = (vA, vB)$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią A , B .

Zbiór $Z(t) = \{(x, y) \mid x = vA(t), y = vB(t); v \geq 0\}$ nazywamy neumannowską przestrzenią produkcyjną w okresie t . Podobnie zbiór $Z = \{(x, y) \mid x = vA, y = vB; v \geq 0\}$ nazywamy graniczną neumannowską przestrzenią produkcyjną (generowaną przez graniczną technologię A , B). Nietrudno zauważyć, że przestrzeń produkcyjna $Z(t)$ jest szczególnym stożkiem wielościennym w R_+^{2n} z wierzchołkiem w 0, który spełnia następujący warunek:

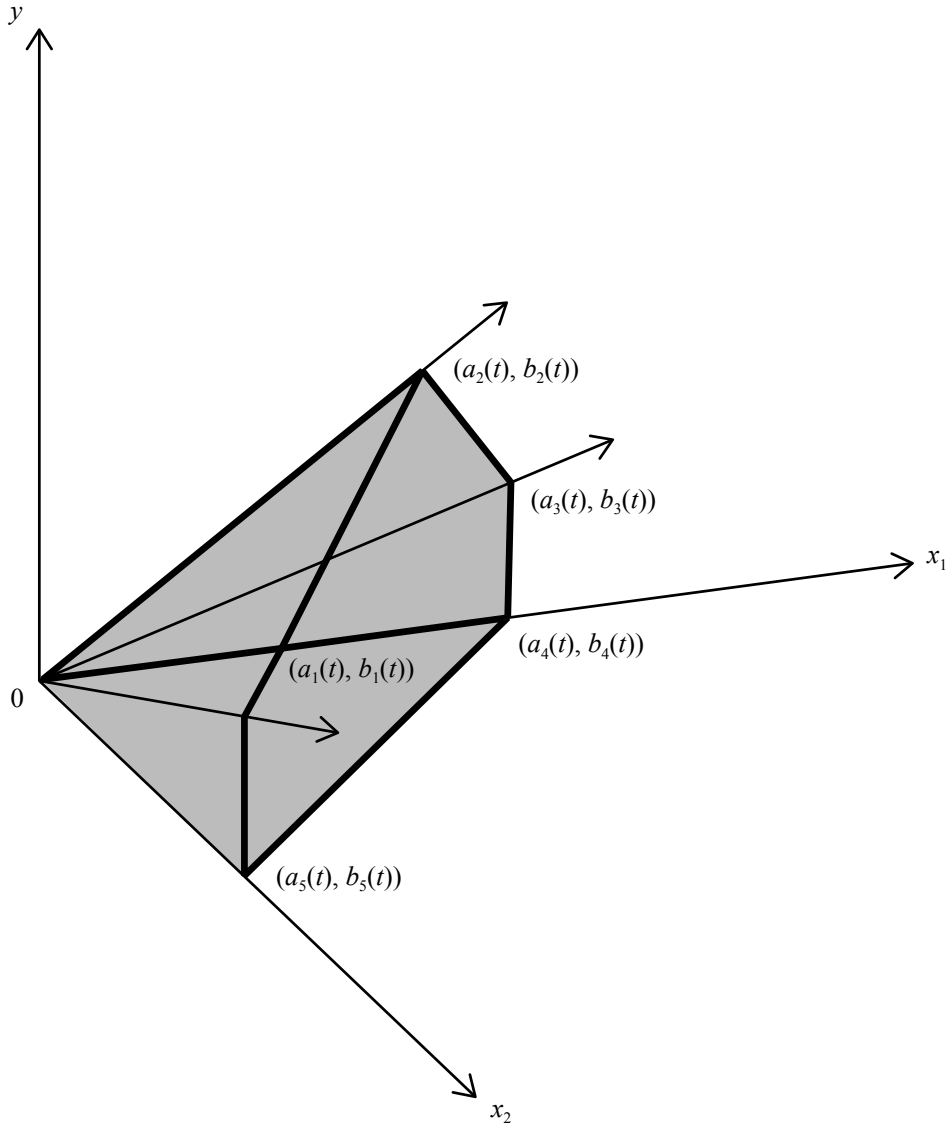
$$(x, y) \in Z(t) \ \& \ x' \geq x \Rightarrow (x', y) \in Z(t)$$

(1)

$$(x, y) \in Z(t) \ \& \ 0 \leq y' \leq y \Rightarrow (x, y') \in Z(t)$$

Analogiczną własność ma także graniczna przestrzeń produkcyjna Z .

Stożek taki z pięcioma bazowymi procesami technologicznymi przedstawia poniższy rysunek (ze względu na konieczność zawarcia całej ilustracji w przestrzeni R^3 , na rysunku nakład jest reprezentowany przez wektor dwuelementowy, $x = (x_1, x_2)$, a wynik przez skalar y).



Rysunek 1. Przestrzeń produkcyjna von Neumanna $Z(t)$ spełniająca warunki (N1), (N2)

Zakładamy, że rozwój technologii w gospodarce von Neumanna zwiększa z czasem jej możliwości wytwórcze, co w języku przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$ prowadzi do warunku:

$$(N3) \quad \forall t (Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq Z).$$

2. Technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji

Weźmy dowolny m -wymiarowy wektor intensywności $v \geq 0$ ⁽¹⁾. Liczbę:

$$\alpha_t(v) = \max \{ \alpha \mid \alpha vA(t) \leq vB(t) \} \quad (2)$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x(t), y(t)) = (vA(t), vB(t)) \in Z(t)$. Zastępując w (2) macierze $A(t)$, $B(t)$ granicznymi macierzami A , B , otrzymujemy definicję wskaźnika technologicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB) \in Z$ (w gospodarce z graniczną technologią):

$$\alpha(v) = \max \{ \alpha \mid \alpha vA \leq vB \}$$

Funkcje $\alpha_t(v)$, $\alpha(v)$ są ciągłe i dodatnio jednorodne na $R_+^m \setminus \{0\}$ (dowód przebiega analogicznie jak dowód podobnych własności funkcji $\alpha(x, y)$ w gospodarce Gale'a ze stałą technologią; zob. Panek [2003], twierdzenie 5.2.

Liczby:

$$\alpha_{N,t} = \max_{v \geq 0} \alpha_t(v) = \max_{\substack{\alpha vA(t) \leq vB(t) \\ v \geq 0}} \alpha \quad (3)$$

$$\alpha_N = \max_{v \geq 0} \alpha(v) = \max_{\substack{\alpha vA \leq vB \\ v \geq 0}} \alpha \quad (4)$$

nazywamy odpowiednio:

- optymalnym wskaźnikiem ($\alpha_{N,t}$) technologicznej efektywności produkcji w gospodarce von Neumanna w okresie t (z technologią $A(t)$, $B(t)$),
- optymalnym wskaźnikiem (α_N) technologicznej efektywności produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią A , B .

¹ Zapis $v \geq 0$ oznacza, że nieujemny wektor v ma co najmniej jedną współrzędną dodatnią.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach **(N1)–(N3)**:

(i) zadania (3), (4) mają rozwiązania $\bar{v}(t)$, $\bar{v}$, tj.:

$$\exists \bar{v}(t) \geq 0 \quad \left(\alpha_t(\bar{v}(t)) = \max_{\substack{\alpha v A(t) \leq v B(t) \\ v \geq 0}} \alpha = \alpha_{N,t} \right)$$

$$\exists \bar{v} \geq 0 \quad \left(\alpha(\bar{v}) = \max_{\substack{\alpha v A \leq v B \\ v \geq 0}} \alpha = \alpha_N \right)$$

$$(2i) \quad \forall t \left(\alpha_{N,t} \leq \alpha_{N,t+1} \leq \alpha_N \right).$$

Dowód

(i) Funkcja $\alpha_t(v)$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc zadanie:

$$\max_{\substack{\alpha v A(t) \leq v B(t) \\ v \geq 0}} \alpha$$

jest równoważne z zadaniem²:

$$\max_{\substack{v \geq 0 \\ \|v\|=1}} \alpha_t(v) \tag{5}$$

maksymalizacji ciągłej funkcji $\alpha_t(v)$ na simpleksie (zbiornie zwartym)

$S_+^m(1) = \left\{ v \in R_+^m \mid \sum_i v_i = 1 \right\}$, które ma rozwiązanie $\bar{v}(t) \geq 0$. Podobnie z ciągłości funkcji $\alpha(v)$ na simpleksie $S_+^m(1)$ wynika, że istnieje rozwiązanie $\bar{v} \geq 0$ zadania:

$$\max_{\substack{v \geq 0 \\ \|v\|=1}} \alpha(v)$$

równoważne z rozwiązaniem zadania:

$$\max_{\substack{\alpha v A(t) \leq v B(t) \\ v \geq 0}} \alpha$$

(2i) W myśl (N3) $Z \supseteq Z_{t+1} \supseteq Z_t$ i, zważywszy na definicje przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$, Z , mamy:

² Tutaj i wszędzie dalej $\|x\| = \sum_i |x_i|$.

$$\begin{aligned}
\alpha_N = \max_{v \geq 0} \alpha(v) &= \max_{\alpha v A \leq v B} \alpha = \max_{\substack{\alpha x \leq y \\ (x,y) \in Z \setminus \{0\}}} \alpha \geq \max_{\substack{\alpha x \leq y \\ (x,y) \in Z_{t+1} \setminus \{0\}}} \alpha = \max_{\substack{\alpha v A(t+1) \leq B(t+1) \\ v \geq 0}} \alpha = \\
&= \max_{v \geq 0} \alpha_{t+1}(v) = \alpha_{N,t+1} \geq \max_{\substack{\alpha x \leq y \\ (x,y) \in Z(t) \setminus \{0\}}} \alpha = \max_{\substack{\alpha_t v A(t) \leq v B(t) \\ v \geq 0}} \alpha = \max_{v \geq 0} \alpha_t(v) = \alpha_{N,t}
\end{aligned}$$

■

Wektory $\bar{v}(t), \bar{v}$ – rozwiązania zadań (3), (4) – nazywamy optymalnymi wektorami intensywności stosowania bazowych procesów, odpowiednio, w gospodarce von Neumanna z technologią $A(t), B(t)$ oraz w gospodarce z technologią graniczną A, B . Podobnie o parach wektorów:

$$\begin{aligned}
(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) &= (\bar{v}(t)A(t), \bar{v}(t)B(t)) \\
(\bar{x}, \bar{y}) &= (\bar{v}A, \bar{v}B)
\end{aligned}$$

mówimy, że opisują optymalne procesy produkcji, odpowiednio, w gospodarce von Neumanna z technologią $A(t), B(t)$ oraz w gospodarce von Neumanna z technologią graniczną A, B . Optymalne wektory intensywności $\bar{v}(t), \bar{v}$ oraz odpowiadające im optymalne procesy produkcji są określane z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury).

Zakładamy, że wśród optymalnych procesów produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią A, B istnieje proces, w którym wytwarzane są wszystkie towary:

$$(N4) \quad \exists \bar{v} \geq 0 (\alpha(\bar{v}) = \alpha_N \text{ \& } \bar{v}B > 0)$$

Własność tę nazywamy warunkiem regularności.

3. Ceny von Neumanna w gospodarce z graniczną technologią. Magistrala produkcyjna

Oznaczmy przez $p \geq 0$ n -wymiarowy wektor (kolumnowy) cen towarów i weźmy dowolny wektor intensywności $v \geq 0$.

Liczbę:

$$\beta(v, p) = \frac{vBp}{vAp}$$

(tam, gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) = (vA, vB)$ w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią A, B .

Niech $\bar{v}$ będzie optymalnym wektorem intensywności w gospodarce von Neumanna z technologią graniczną (dla którego $\alpha(\bar{v}) = \alpha_N$).

Δ Definicja 1. Ceny $\bar{p} \geq 0$, przy których:

$$\beta_N = \beta(\bar{v}, \bar{p}) = \max_{v \geq 0} \beta(v, \bar{p}) = \max_{v \geq 0} \alpha(v) = \alpha(\bar{v}) = \alpha_N \quad (6)$$

nazywamy cenami von Neumanna (w gospodarce z graniczną technologią).

▲

Jeżeli spełnione są warunki (N1)–(N4), to ceny von Neumanna istnieją i są określone z dokładnością do struktury (dowód przebiega podobnie jak dowód istnienia cen von Neumanna w gospodarce ze stałą technologią; zob. Panek [2011], twierdzenie 2. O trójce $\{\alpha_N, \bar{v}, \bar{p}\}$ spełniającej warunek (6) mówimy, że charakteryzuje gospodarkę z graniczną technologią w równowadze von Neumanna.

Z (6) wynika, że:

$$\forall v \geq 0 \left(\beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N \right)$$

czyli:

$$\forall v \geq 0 \left(vB\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} \leq 0 \right) \quad (7)$$

i jedynie dla $v = \bar{v}$ zachodzi równość:

$$\bar{v}B\bar{p} - \alpha_N \bar{v}A\bar{p} = 0 \quad (8)$$

W gospodarce z technologią graniczną w równowadze von Neumanna dochodzi zatem do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną i jest to najwyższa efektywność jaką w ogóle może osiągnąć niestacjonarna gospodarka spełniająca warunki (N1)–(N4).

Warunek 7 jest równoważny z warunkiem³:

$$\forall (x, y) \in Z \left(\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_N \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0 \right) \quad (7')$$

³ Tutaj i wszędzie dalej $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ (iloczyn skalarny wektorów x, y).

gdzie:

$$Z = \{(x, y) \mid x = vA, y = vB; v \geq 0\}$$

a warunek (8) z warunkiem:

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle - \alpha_N \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle = 0$$

dla $\bar{x} = \bar{v}A, \bar{y} = \bar{v}B$.

W celu uproszczenia dalszych wywodów będziemy zakładać, że:

(N5) Ceny von Neumanna $\bar{p}$ są dodatnie⁴.

Nietrudno zauważyć, że przy tym założeniu optymalny wektor intensywności $\bar{v}$ spełnia warunek:

$$\alpha_N \bar{v}A = \bar{v}B \quad (9)$$

Istotnie, z definicji optymalnego współczynnika α_N i optymalnego wektora intensywności $\bar{v}$ mamy:

$$\alpha_N \bar{v}A \leq \bar{v}B \quad (10)$$

(zob. twierdzenie 1(i)). Załóżmy, że po pewnej, np. i -tej, współrzędnej w (10) mamy ostrą nierówność:

$$\alpha_N (\bar{v}A)_i < (\bar{v}B)_i$$

Wówczas otrzymujemy:

$$\alpha_N \bar{v}A \bar{p} < \bar{v}B \bar{p}$$

(gdyż $\bar{p} > 0$, zgodnie z **(N5)**), co przeczy (8).

Optymalnemu wektorowi intensywności $\bar{v}$ w gospodarce z graniczną technologią odpowiada optymalny wektor nakładów $\bar{x} = \bar{v}A$ oraz wyników (produkcji) $\bar{y} = \bar{v}B$ i zgodnie z (9):

$$\bar{s} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\bar{v}A}{\|\bar{v}A\|} = \frac{\alpha_N \bar{v}A}{\|\alpha_N \bar{v}A\|} = \frac{\bar{v}B}{\|\bar{v}B\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$$

⁴ Założenie to znacznie upraszcza dowody twierdzeń o magistrali (w artykule twierdzenia 3 i 4), choć nie jest konieczne.

tj. struktura nakładów i wyników w optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{v}A, \bar{v}B)$ jest identyczna.

Δ Definicja 2. O wektorze $\bar{s}$ mówimy, że charakteryzuje optymalną strukturę produkcji w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią.



Promień (półprosta)

$$N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią.

4. Wzrost

Niech $v(t)$ będzie wektorem intensywności, z jaką w okresie t w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna stosowane są bazowe procesy technologiczne. Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że źródłem nakładów w okresie następnym $x(t+1) = v(t+1)A(t+1)$ może być tylko produkcja wytworzona w okresie poprzednim $y(t) = v(t)B(t)$:

$$v(t+1)A(t+1) \leq v(t)B(t) \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \quad (11)$$

$$v(t) \geq 0 \quad t = 0, 1, \dots, t_1$$

Oznaczmy przez v^0 intensywność, z jaką bazowe procesy technologiczne są stosowane w początkowym okresie $t = 0$:

$$v^0 = v^0 \geq 0 \quad (12)$$

Δ Definicja 3. Rozwiązanie $(v(t))_{t=0}^{t_1}$ układu (11)–(12) nazywamy (v^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią intensywności (stosowania bazowych procesów technologicznych) w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna. Ciągi $(x(t))_{t=0}^{t_1}$, $(y(t))_{t=0}^{t_1}$, gdzie:

$$x(t) = v(t)A(t), \quad y(t) = v(t)B(t)$$

nazywamy odpowiednio (x^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią nakładów (z początkowym wektorem $x^0 = v^0 A(0)$) oraz (y^0, t_1) – dopuszczalną trajektorią produkcji (z początkowym wektorem $y^0 = v^0 B(0)$).

O trójce ciągów $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.



Twierdzenia o magistrali prezentowane w tym artykule wymagają, aby istniał co najmniej jeden proces dopuszczalny $(\tilde{v}(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t))_{t=0}^{\tilde{t}}$ umożliwiający dojście gospodarki w pewnym okresie $\tilde{t}$ do magistrali. Warunek ten oznacza, że:

(N6) Istnieje taka $(v^0, \tilde{t})$ – dopuszczalna trajektoria intensywności $(\tilde{v}(t))_{t=0}^{\tilde{t}}$, że:

$$\alpha_{\tilde{t}}(\tilde{v}(\tilde{t})) = \alpha_N$$

Mówi o tym następujące twierdzenie.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli zachodzi warunek **(N6)** oraz $t_1 > \tilde{t}$ to istnieje taki (v^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ oraz taka liczba $\sigma > 0$, że dla $t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$:

$$\alpha_t(v(t)) = \alpha_N \quad (13)$$

$$x(t) = v(t)A(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}} x(\tilde{t}) = \alpha_N^{t-\tilde{t}} \sigma \bar{s} \in N \quad (14)$$

$$y(t) = v(t)B(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}} y(\tilde{t}) = \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} \sigma \bar{s} \in N \quad (15)$$

Dowód. Z założenia mamy taką $(v^0, \tilde{t})$ – dopuszczalną trajektorię intensywności $(\tilde{v}(t))_{t=0}^{\tilde{t}}$, że $\alpha_{\tilde{t}}(\tilde{v}(\tilde{t})) = \alpha_N$, czyli:

$$\alpha_N \tilde{v}(\tilde{t}) A(\tilde{t}) \leq \tilde{v}(\tilde{t}) B(\tilde{t})$$

Niech $a = \tilde{v}(\tilde{t}) A(\tilde{t})$, $b = \tilde{v}(\tilde{t}) B(\tilde{t})$. Wówczas:

$$(a, b) \in Z(\tilde{t}) = \{(x, y) \mid x = vA(\tilde{t}), y = vB(\tilde{t}); v \geq 0\}$$

oraz

$$\alpha_N a \leq b$$

Stąd oraz z własności (1) przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$ wynika, że $(a, \alpha_N a) \in Z(\tilde{t})$, czyli:

$$\exists v'(\tilde{t}) \geq 0 \left(\alpha_N v'(\tilde{t}) A(\tilde{t}) = \alpha_N \tilde{v}(\tilde{t}) A(\tilde{t}) = v'(\tilde{t}) B(\tilde{t}) \right)$$

Przyjmijmy oznaczenia⁵: $a' = v'(\tilde{t}) A(\tilde{t})$, $b' = v'(\tilde{t}) B(\tilde{t})$.

Wówczas:

$$(a', b') \in Z(\tilde{t}) \text{ oraz } \alpha_N a' = b' \quad (16)$$

Utwórzmy następujący ciąg $(\xi(t))_{t=\tilde{t}}^{t_1}$:

$$\xi(\tilde{t}) = a' \left(= v'(\tilde{t}) A(\tilde{t}) \right), \xi(\tilde{t} + 1) = \alpha_N a', \dots, \xi(t_1) = \alpha_N^{t_1 - \tilde{t}} a'$$

Z (16), **(N3)** oraz tego, że przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, Z są stożkami wielościennymi w R_+^{2n} z wierzchołkiem w 0 wynika, że:

$$\begin{aligned} (\xi(\tilde{t}), \xi(\tilde{t} + 1)) &\in Z(\tilde{t}) \subseteq Z \\ (\xi(\tilde{t} + 1), \xi(\tilde{t} + 2)) &\in Z(\tilde{t}) \subseteq Z(\tilde{t} + 1) \subseteq Z \\ &\vdots \\ (\xi(t_1), \xi(t_1 + 1)) &\in Z(\tilde{t}) \subseteq Z(t_1) \subseteq Z \end{aligned} \quad (17)$$

Z własności (1) przestrzeni $Z(\tilde{t})$ oraz definicji ciągu $(\xi(t))_{t=\tilde{t}}^{t_1}$ otrzymujemy:

$$(\xi(\tilde{t}), \xi(\tilde{t} + 1)) = (v'(\tilde{t}) A(\tilde{t}), v'(\tilde{t}) B(\tilde{t})) = (a', \alpha_N a')$$

Z własności (1) przestrzeni $Z(\tilde{t} + 1)$ oraz (17) wynika, że:

$$\begin{aligned} \exists v'(\tilde{t} + 1) \geq 0 \quad (\xi(\tilde{t} + 1), \xi(\tilde{t} + 2)) &= (v'(\tilde{t} + 1) A(\tilde{t} + 1), v'(\tilde{t} + 1) B(\tilde{t} + 1)) = \\ &= (\alpha_N a', \alpha_N^2 a') \end{aligned}$$

Rozumując analogicznie, dalej stwierdzamy, że dla $t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$:

$$\exists v'(t) \geq 0 \quad (\xi(t), \xi(t + 1)) = ((v'(t) A(t), v'(t) B(t)) = (\alpha_N^{t - \tilde{t}} a', \alpha_N^{t - \tilde{t} + 1} a'))$$

⁵ Ponieważ $v'(\tilde{t}) A(\tilde{t}) = \tilde{v}(\tilde{t}) A(\tilde{t})$, zatem *de facto* $a' = a$.

Zgodnie z taką konstrukcją ciągu $(v'(t))_{t=\tilde{t}}^{t_1}$:

$$\begin{aligned} v'(\tilde{t})A(\tilde{t}) &= \tilde{v}(\tilde{t})A(\tilde{t}) = a' \leq \tilde{v}(\tilde{t}-1)B(\tilde{t}-1) \\ v'(\tilde{t}+1)A(\tilde{t}+1) &= \alpha_N a' = v'(\tilde{t})B(\tilde{t}) \\ &\vdots \\ v'(t_1)A(t_1) &= \alpha_N^{t_1-\tilde{t}} a' = v'(t_1-1)B(t_1-1) \end{aligned}$$

Utwórzmy ciąg $(v(t))_{t=0}^{t_1}$ ze „sklejenia” $(v^0, \tilde{t})$ – dopuszczalnej trajektorii intensywności $(\tilde{v}(t))_{t=0}^{\tilde{t}}$ i wyżej zbudowanego ciągu $(v'(t))_{t=\tilde{t}}^{t_1}$:

$$v(t) = \begin{cases} \tilde{v}(t) & \text{dla } t = 0, 1, \dots, \tilde{t} - 1 \\ v'(t) \alpha_N^{t-\tilde{t}} & \text{dla } t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

Tak zbudowany ciąg jest (v^0, t_1) dopuszczalną trajektorią intensywności spełniającą dla $t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$ warunek (13). Jednocześnie z inkluzji:

$$(v(t)A(t), v(t)B(t)) = (\alpha_N^{t-\tilde{t}} a', \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} a') \in Z(t) \subseteq Z, \quad t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$$

wynika, że:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (a', \alpha_N a') \in Z$$

(gdyż Z jest stożkiem z wierzchołkiem w 0) oraz:

$$\exists \bar{v} \geq 0 \left(\bar{x} = a' = \bar{v}A, \bar{y} = \alpha_N a' = \bar{v}B \right) \& \alpha(\bar{v}) = \alpha_N$$

Wektor $\bar{v}$ jest optymalnym wektorem intensywności w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią, $\bar{x} = a' = \bar{v}A \in N$ jest optymalnym wektorem nakładów, a $\bar{y} = \bar{v}B \quad (= \alpha_N a') \in N$ – optymalnym wektorem produkcji w takiej gospodarce oraz:

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \bar{s}$$

Z definicji magistrali $N = \{\lambda \bar{s} \mid \lambda > 0\}$ wynika, że $\exists \sigma > 0 \quad (a' = \sigma \bar{s})$.

Definiując trajektorię nakładów $x(t) = v(t)A(t)$ oraz produkcji $y(t) = v(t)B(t)$ otrzymujemy żądany proces spełniający dla $t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$ warunki (14), (15).

■

W celu zapewnienia jednoznaczności magistrali będziemy zakładać, że:

$$(N7) \quad \forall v \geq 0 \left(x = vA \notin N \vee y = vB \notin N \Rightarrow \beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} < \alpha_N \right)$$

W myśl tego warunku ekonomiczna efektywność jakiegokolwiek procesu $(x, y) = (vA, vB)$ poza magistralą jest niższa od optymalnej.

□ **Twierdzenie 3.** Jeżeli w gospodarce von Neumanna z graniczną technologią spełniony jest warunek (N7), to:

$$\begin{aligned} \forall v \geq 0 \quad \forall (x, y) = (vA, vB) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad & \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s}^x \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \right. \\ & \left. \Rightarrow \beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leq \alpha_N - \delta_\varepsilon \right) \end{aligned}$$

■

Z dowodem tego twierdzenia można zapoznać się np. w pracy Panek [2011], twierdzenie 3. Nawiązując do tej pracy, rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w niestacjonarnej gospodarce w ostatnim okresie horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$:

$$\max v(t_1)B(t_1)\bar{p} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} v(t+1)A(t+1) &\leq v(t)B(t) \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \\ v(t) &\geq 0 \quad t = 0, 1, \dots, t_1 \\ v(0) &= v^0 \geq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(wektor v^0 ustalony)

Δ **Definicja 4.** Rozwiązanie $(v^*(t))_{t=0}^{t_1}$ zadania (18)–(19) nazywamy $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna. Ciągi $(x^*(t))_{t=0}^{t_1}, (y^*(t))_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x^*(t) = v^*(t)A(t)$, $y^*(t) = v^*(t)B(t)$, nazywamy (odpowiednio): $(x^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią nakładów (z początkowym wektorem nakładów $x^0 = v^0 A(0)$) oraz $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią produkcji (z początkowym wektorem produkcji $y^0 = v^0 B(0)$). O trójce ciąg-

gów $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje optymalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.



□ **Twierdzenie 4.** („Słabe” twierdzenie o magistrali).

Jeżeli niestacjonarna gospodarka von Neumanna spełnia warunki (N1)–(N7), to $\forall \varepsilon > 0$, istnieje taka liczba naturalna k_ε , że liczba okresów, w których zachodzi którykolwiek z warunków:

$$\left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon, \quad \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \quad (20)$$

nie przekracza k_ε . Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu t_1 .

Dowód. Niech $(v^*(t))_{t=0}^{t_1}$ będzie $(v^0, t_1, \bar{p})$ – optymalną trajektorią intensywności (rozwiązaniem zadania (18)–(19)).

Ponieważ:

$$\forall t \left((x^*(t), y^*(t)) = (v^*(t)A(t), v^*(t)B(t)) \in Z(t) \subset Z \right)$$

więc zgodnie z (7):

$$\langle \bar{p}, y^*(t) \rangle \leq \alpha_N \langle \bar{p}, x^*(t) \rangle \quad (21)$$

czyli:

$$v^*(t)B(t)\bar{p} \leq \alpha_N v^*(t)A(t)\bar{p} \quad t = 0, 1, \dots, t_1$$

oraz:

$$v^*(t+1)A(t+1) \leq v^*(t)B(t) \quad t = 0, 1, \dots, t_1$$

(zgodnie z (19)), czyli:

$$v^*(t+1)A(t+1)\bar{p} \leq \alpha_N v^*(t)A(t)\bar{p} \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \quad (22)$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór tych okresów $t \in T$, w których zachodzi którykolwiek z warunków (20). Niech l_ε będzie liczbą elementów zbioru L_ε . Wobec (N3):

$$\exists v' \geq 0 \left((x^*(t)(t)) = (v^*(t)A(t), v^*(t)B(t)) = (v'A, v'B) \right)$$

Wtedy, zgodnie z twierdzeniem 3:

$$v^*(t)A(t)\bar{p} \leq (\alpha_N - \delta_\varepsilon) v^*(t)A(t)\bar{p} \quad \text{dla} \quad t \in L_\varepsilon \quad (23)$$

Z (22), (23) otrzymujemy:

$$v^*(t_1)A(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N^{t_1-l_\varepsilon} (\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon} v^0 A(0) \bar{p} \quad (24)$$

Zgodnie z **(N6)** i twierdzeniem 2 istnieje taki (x^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ i taki okres $\tilde{t} < t_1$, że:

$$x(t) = v(t)A(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}} \sigma \bar{s} \in N$$

$$y(t) = v(t)B(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} \sigma \bar{s} \in N$$

dla pewnej liczby $\sigma > 0$ i $t = \tilde{t}, \tilde{t}+1, \dots, t_1$.

Wówczas:

$$v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} \geq v(t_1)B(t_1)\bar{p} = \alpha_N^{t_1-\tilde{t}+1} \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0 \quad (25)$$

Łącząc (24), (25) (oraz pamiętając, że $v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\bar{p}$), dochodzimy do nierówności:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_N^{t_1-\tilde{t}+1} \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle &\leq v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\bar{p} \leq \\ &\leq \alpha_N^{t_1-l_\varepsilon} (\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon} v^0 A(0) \bar{p} \end{aligned}$$

która pozwala na oszacowanie górnego ograniczenia liczby l_ε :

$$l_\varepsilon \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_N - \ln(\alpha_N - \delta_\varepsilon)} = B$$

gdzie $A = \frac{\alpha_N^{\tilde{t}} v^0 A(0) \bar{p}}{\sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\min \{0, B\}$.

■

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, optymalne procesy wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna „prawie zawsze”⁶, niezależnie od długości

⁶ To znaczy, zawsze poza pewną skończoną liczbą okresów.

horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali produkcyjnej, którą wyznacza graniczna technologia A, B . Tempo wzrostu produkcji na magistrali jest najwyższym tempem możliwym do osiągnięcia przez gospodarke.

Niewielkim wysiłkiem można otrzymać teraz tzw. „bardzo silną” wersję twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna.

□ **Twierdzenie 5.** („Bardzo silne” twierdzenie o magistrali).

Jeżeli niestacjonarna gospodarka von Neumanna spełnia warunki (N1)–(N5), (N7) i optymalny proces wzrostu $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$, w pewnym okresie $\tilde{t} < t_1$ dochodzi do magistrali, tzn. $\alpha_{\tilde{t}}(v^*(\tilde{t})) = \alpha_N$, to:

$$\forall t \geq \tilde{t} (x^*(t) = v^*(t) A(t) \in N \quad \text{oraz} \quad y^*(t) = v^*(t) B(t) \in N)$$

Dowód. Weźmy optymalny proces wzrostu $(v^*(t), x^*(t), y^*(t))_{t=0}^{t_1}$. Trajektoria $(v^*(t))_{t=0}^{t_1}$ jest rozwiązaniem zadania (18)–(19) oraz $x^*(t) = v^*(t) A(t)$, $y^*(t) = v^*(t) B(t)$. Z założenia proces ten w okresie $\tilde{t} < t_1$ prowadzi do magistrali, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 istnieje taka liczba $\sigma > 0$ oraz taki dopuszczalny proces wzrostu $(v(t), x(t), y(t))_{t=0}^{t_1}$ z trajektorią intensywności:

$$v(t) = \begin{cases} v^*(t), & \text{dla } t = 0, 1, \dots, \tilde{t} - 1 \\ v'(t), & \text{dla } t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

że:

$$x(t) = x^*(t) = v^*(t) A(t)$$

$$y(t) = y^*(t) = v^*(t) B(t)$$

dla $t = 0, 1, \dots, \tilde{t} - 1$, oraz:

$$x(t) = v'(t) A(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}} \sigma \bar{s} \in N$$

$$y(t) = v'(t) B(t) = \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} \sigma \bar{s} \in N$$

dla $t = \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, t_1$. Wówczas:

$$v^*(t_1) B(t_1) \bar{p} \geq x(t_1) B(t_1) \bar{p} = \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} \sigma \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0 \quad (27)$$

Z drugiej strony, postępując analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 4 z (22) (pamiętając, że $v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\bar{p}$), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} &\leq \alpha_N v^*(t_1)A(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N^2 v^*(t_1-1)A(t_1-1)\bar{p} \leq \dots \\ &\leq \alpha_N^{t_1-\tilde{t}+1} v^*(\tilde{t})A(\tilde{t})\bar{p} = \alpha_N^{t_1-\tilde{t}+1} \sigma\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

Założmy, że w pewnym okresie $\tau > \tilde{t}$ $x^*(\tau) = v^*(\tau)A(\tau) \notin N$, tzn.:

$$\exists \varepsilon > 0 \left(\left\| \frac{x^*(\tau)}{\|x^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \vee \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(\tau)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \right)$$

i zgodnie z twierdzeniem 3:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 ((v^*(\tau+1)A(\tau+1)\bar{p} \leq v^*(\tau)B(\tau)\bar{p} \leq (\alpha_N - \delta_\varepsilon)v^*(\tau)A(\tau)\bar{p})) \quad (29)$$

co łącznie z (28) prowadzi do nierówności:

$$v^*(t_1)B(t_1)\bar{p} \leq \alpha_N^{t_1-\tilde{t}} (\alpha_N - \delta_\varepsilon) \sigma\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \quad (30)$$

Z (27), (30) otrzymujemy warunek:

$$\alpha_N^{t_1-\tilde{t}} (\alpha - \delta_\varepsilon) \sigma\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \geq \alpha_N^{t-\tilde{t}+1} \sigma\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle$$

z którego wynika, że $\delta_\varepsilon \leq 0$.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie głosi, że „wejście” optymalnego procesu wzrostu na magistralę w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna (z technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej) jest bezpowrotne.

Uwaga 1. Jeżeli początkowy wektor intensywności v^0 w zadaniu (18)–(19) (w optymalnym procesie wzrostu) jest dodatni, wtedy obydwa twierdzenia o magistrali są prawdziwe także bez warunku (N6).

Uwaga 2. Obydwa twierdzenia pozostają prawdziwe, jeżeli kryterium (18) maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w ostatnim okresie horyzontu T zastąpimy kryterium maksymalizacji dowolnej społecznej

funkcji użyteczności $u(y(t_1)) = g(\langle \bar{p}, y(t_1) \rangle)$, gdzie g jest monotonicznie rosnącą, ciągłą funkcją z R_+^1 do R_+^1 oraz $y(t_1) = v(t_1)B(t_1)$.

Uwaga 3. Wydaje się, że własności podobne do sformułowanych w twierdzeniach 4, 5 mają także optymalne procesy wzrostu w niestacjonarnej gospodarce von Neumanna z kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) wytworzonej w całym horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ (a nie tylko w jego końcowym okresie). Wymaga to jednak dalszych badań.

Bibliografia

- Gantz, D.T., 1980, *A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model*, *Econometrica*, vol. 48, no. 7.
- Joshi, S., 1997, *Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Environments*, *Int. Econ. Rev.*, vol. 38, no. 1.
- Keeler, E.B., 1972, *A Twisted Turnpike*, *Int. Econ. Rev.*, vol. 13, no. 1.
- Khan, M.A., Piazza, A., 2011a, *An Overview of Turnpike Theory: Towards the Discounted Deterministic Case*, *Adv. Math. Econ.*, vol. 14.
- Khan, M.A., Piazza, A., 2011b, *The Economics of Forestry and a Set-valued Turnpike of the Classical Type*, *Nonlinear Analysis*, vol. 74.
- Khan, M.A., Zaslavski, A.J., 2010, *On Two Classical Turnpike Results for the Robinson-Solow-Srinivasan Model*, *Asv. Math. Econ.*, vol. 13.
- Panek, E., 2003, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.
- Panek, E., 2011, *O pewnej wersji „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, *Przegląd Statystyczny*, t. 58, nr 1–2.
- Panek, E., Runka, H.J., 2012, *Dwa twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna*, *Przegląd Statystyczny*, t. 59, nr 2.
- Zaslavski, A.J., 2006, *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, New York.

NON-STATIONARY VON NEUMANN MODEL WITH LIMIT TECHNOLOGY

Abstract: The vast majority of papers on the turnpike theory consider a stationary economy with constant technology (over time). There are only few attempts to go beyond the „vicious circle” of stationarity and to trace the so called turnpike effect in a non-stationary Neumann-Gale economy with unstable technology. This article undertakes this task. In

the paper „weak” and „very strong” versions of the turnpike theorem in a non-stationary von Neumann economy are presented, with the technology converging to a certain technology limit.

Keywords: non-stationary von Neumann model, limit technology, „weak” and „very strong” turnpike theorem.