

Aleksandra Rutkowska

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki
Elektronicznej, Katedra Matematyki Stosowanej
aleksandra.rutkowska@ue.poznan.pl

ZADANIE MAKSYMALIZACJI SATYSFAKCJI INWESTORA Z PORTFELA INWESTYCYJNEGO

Streszczenie: Problem wyboru portfela inwestycyjnego jest szeroko omawiany w literaturze przedmiotu zarówno na podstawie analiz stochastycznych jak i przy użyciu aparatu teorii zbiorów rozmytych. Najczęściej stosowanym kryterium jest maksymalizacja zysku i jednoczesna minimalizacja ryzyka. Badania empiryczne przeprowadzane wśród inwestorów pokazały, że nie zawsze postępują oni zgodnie z tą zasadą. Inwestorzy indywidualni oceniają zyski i niepewność w świetle indywidualnych oczekiwań, w dużej mierze opierając się na emocjach i intuicji. W niniejszej pracy zaproponowany zostanie autorski model wyboru portfela inwestycyjnego z zastosowaniem miary satysfakcji. Do formalnego opisu użyto rozmytej stopy zwrotu w ujęciu teorii wiarygodności. Prezentowany model zakłada, że inwestor maksymalizuje poziom satysfakcji z inwestycji rozumianej jako podobieństwo wiarygodności wystąpienia danych stóp zwrotu i oczekiwań inwestora. Model zilustrowany zostanie przykładami liczbowymi.

Słowa kluczowe: optymalizacja portfela, zmienna rozmyta, satysfakcja inwestora, teoria wiarygodności, rozmyta stopa zwrotu.

Klasyfikacja JEL: G11, C61.

THE TASK OF MAXIMISING THE SATISFACTION FROM AN INVESTOR'S INVESTMENT PORTFOLIO

Abstract: The problem of selecting an investment portfolio has been widely discussed in the literature, based on both a stochastic analysis as well as a fuzzy set theory framework. The most commonly used criterion is to maximize profit while minimizing risk. Empirical studies conducted among investors have shown that they do not always act in accordance with this principle. Individual investors assess the gains and uncertainty in the light of individual expectations, largely based on emotion and intuition. In this paper a new investment portfolio selection model will be proposed based on the measure of satisfaction. A formal description

of the fuzzy environment is used based on the rate of return. This model assumes that an investor maximizes their level of satisfaction with an investment, understood as the similarity between the reliability of the fuzzy returns and the investor's expectations. The model is illustrated with mathematical examples to illustrate the optimization idea and compare it to the mean-variance model.

Keywords: portfolio optimization, fuzzy variable, investor satisfaction, credibility theory, fuzzy returns.

Wstęp

Zagadnienie optymalizacji portfela inwestycyjnego od czasów publikacji Markowitza [Markowitz 1952] jest szeroko omawianym problemem nowoczesnych finansów. Główny nurt badań opiera się na analizie probabilistycznej. Od lat 90. ubiegłego stulecia rozwijają się modele wyboru portfela wykorzystujące metody rozmyte. Zwolennicy podejścia rozmytego podkreślają brak precyzji i pełnej informacji o prawdopodobieństwie stóp zwrotu oraz trudne do spełnienia założenia teorii Markowitza. Aparat logiki wielowartościowej zaproponowany przez Zadeha pozwala na modelowanie niepewności i niejednoznaczności danych płynących z rynku, a także umożliwia modelowanie preferencji inwestorów. Modele wykorzystujące logikę rozmytą, nazywane rozmytymi lub nieostryimi, można podzielić na trzy rodzaje: stosujące teorię decyzji rozmytych; programowanie przedziałowe; teorię możliwości i wiarygodności¹. Niezależnie od użytego aparatu matematycznego poszukiwanie optymalnego portfela polega na maksymalizowaniu zysku z inwestycji przy jednoczesnej minimalizacji niepewności. Dużo badań empirycznych prowadzonych na rynkach finansowych ujawniło istnienie wielu odstępstw od tej zasady [Bachmann i Hens 2008; Zielonka 2008]. Według Ogólnopolskiego Badania Inwestorów Indywidualnych (OBI) z 2012 roku inwestorzy kierują się przede wszystkim własnymi analizami (61,8%) oraz wyczuciem (57,4%). Największa grupa inwestorów (38%) przy podejmowaniu decyzji łączy ze sobą analizę techniczną i fundamentalną. Analiza techniczna jest preferowana przez 21,8%, a analiza fundamentalna przez 17,6%, podczas gdy 21,5% przyznaje, że nie potrafi analizować instrumentów finansowych². Wyniki ukazują brak

¹ Zaproponowana w 2004 r. przez Liu [Liu 2004] teoria wiarygodności może być traktowana jako rozwinięcie teorii możliwości. Teoria możliwości opiera się na pojęciu miary możliwości (*possibility*) i konieczności (*necessity*), teoria wiarygodności (*credibility*) na mierze wiarygodności będącej średnią arytmetyczną miar możliwości i konieczności.

² <http://www.sii.org.pl/edukacja,i,analizy/badania,i,rankingi/ogolnopolskie,badanie,inwestorow,-,obi,2012;4380.html>.

praktycznych zastosowań analizy portfelowej. Przyczyną może być zbyt duża złożoność obliczeniowa, trudności w interpretacji lub brak znajomości metod opartych na analizie miar zysku i ryzyka. Ponadto behawioralna analiza portfelowa podkreśla, że cechą rzeczywistych portfeli jest ich silne uzależnienie od emocji. Inwestorzy starają się przede wszystkim ograniczyć potencjalne negatywne emocje i nasilić emocje pozytywne. Z tego powodu istotne i potrzebne jest określenie nowych kryteriów optymalizacji rozumianych intuicyjnie. W szerszej perspektywie może zaowocować to popularyzacją wśród inwestorów świadomego doboru aktywów do portfela. Próba odpowiedzi na te potrzeby jest proponowane w artykule zadanie maksymalizacji satysfakcji inwestora.

Kotler [Kotler 1967] zdefiniował satysfakcję klienta jako stan odczuwany przez jednostkę i związany z porównaniem postrzeganych cech oraz oczekiwań jednostki dotyczących tych cech. Analogicznie przez satysfakcję inwestora z inwestycji rozumiemy podobieństwo wyników inwestycji i oczekiwań. Inwestor wyraża oczekiwania najczęściej w formie rozmytej lub lingwistycznej, a wynik inwestycji ocenia *ex post* poprzez stopień spełnienia oczekiwań. *Ex ante* szacowana może być wiarygodność³ wystąpienia poszczególnych stóp zwrotów dla poszczególnych aktywów. Dlatego zakładamy, że inwestor, starając się maksymalizować swoją satysfakcję, wybiera portfel, dla którego podobieństwo funkcji wiarygodności rozmytej stopy zwrotu z portfela z funkcją oczekiwań jest największe.

W kolejnej części zostaną przedstawione podstawowe informacje z obszaru logiki rozmytej oraz zmiennej rozmytej w ujęciu teorii wiarygodności. Następnie zaproponowane zostanie zadanie optymalizacyjne opierające się na pojęciu satysfakcji oraz porównane na prostych przykładach z zadaniem średnia – wariancja.

1. Podstawowe definicje

W artykule odwołujemy się do pojęć z zakresu logiki rozmytej. Z tego powodu w poniższym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe definicje niezbędne do zrozumienia proponowanego modelu.

Definicja 1 [Zadeh 1965]

Poprzez zbiór rozmyty A określony w przestrzeni X będziemy rozumieć funkcję:

³ W artykule rozróżnia się pojęcia: możliwość (*possibility*) i wiarygodność (*credibility*) zaistnienia zdarzenia. Pierwsze określone jest poprzez miarę możliwości, drugie miarę wiarygodności. Warto zaznaczyć, że zdarzenie możliwe w stopniu 1, nie jest zdarzeniem pewnym.

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Funkcja ta, nazywana funkcją przynależności, określa stopień przynależności elementu x do zbioru A . Zaproponowany w pracy model zostanie zilustrowany przykładami wykorzystującymi trójkątne liczby rozmyte, o następującej funkcji przynależności⁴:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b \leq x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

Sposoby mierzenia podobieństwa między dwoma zbiorami rozmytymi są szeroko opisywane w literaturze [Cross i Sudkamp 2002]. Bouchon-Meunier [Bouchon-Meunier, Rifqi i Bothorel 1996] omówiła różnice i cechy miar: spełnialności (*satisfiability*), podobieństwa, zawarcia i niepodobieństwa zbiorów rozmytych, opierając badania na mierze podobieństwa Tversky'ego. Tversky [Tversky 1977] zdefiniował podobieństwo dwóch obiektów poprzez funkcje cech podobnych oraz różniących. Porównanie dwóch zbiorów rozmytych A i B określonych na tej samej przestrzeni X bierze pod uwagę elementy, które należą do tych zbiorów przynajmniej częściowo oraz elementy, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B , czyli należą do dopełnienia zbioru $B(\bar{B})$ ⁵ oraz należą do zbioru B i $\bar{A}$. Do wyznaczenia części wspólnej dwóch zbiorów rozmytych wykorzystuje się t -normy, najpopularniejszą z nich jest operator MIN. Zatem część wspólna zbiorów rozmytych A i B , określona jest następująco:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X$$

Miarę zbioru rozmytego oceniającą wagę ich elementów zdefiniowano w pracy [Bouchon-Meunier, Rifqi i Bothorel 1996] następująco:

Definicja 2 [Bouchon-Meunier, Rifqi i Bothorel 1996]

Niech X będzie niepustym zbiorem, a $P(X)$ rodziną podzbiorów X . Miara M zbioru rozmytego to odwzorowanie: $M : P(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$, takie że dla każdego A i B w $P(X)$:

⁴ Taką funkcję będzie określać w skrócie zapis $\mu = (a, b, c)$.

⁵ Przez dopełnienie zbioru B , rozumiemy funkcję: $\mu_{\bar{B}} = 1 - \mu_B$.

$$- M(\emptyset) = 0$$

$$- \text{Jeśli } B \subseteq A, \text{ wtedy } M(B) \leq M(A)$$

Przykładem takiej miary dla zbiorów X nieskończonych jest:

$$M(A) = \int_X \mu_A(x) dx$$

Zatem przez miarę podobieństwa dwóch zbiorów rozmytych A i B , rozumieć będziemy:

$$S = \frac{M(A \cap B)}{M(A \cap B) + \alpha M(A \cap \bar{B}) + \beta M(\bar{A} \cap B)},$$

gdzie α, β – parametry wag.

Proponowany model optymalizacji wykorzystuje pojęcie zmiennej rozmytej⁶ w ujęciu zaproponowanym przez Liu [2004].

Definicja 3 [Liu 2004]

Niech Θ będzie niepustym zbiorem, $P(\Theta)$ rodziną podzbiorów Θ . Każdy element $P(\Theta)$ jest nazywany zdarzeniem.

Do miar zdarzeń należy między innymi miara wiarygodności [Liu 2002]. Określa ona wiarygodność wystąpienia zdarzeń, która jest interpretowana jako szansa ich wystąpienia.

Definicja 4 [Liu 2004]

Poprzez miarę wiarygodności będziemy rozumieć funkcję $Cr : P(\Theta) \rightarrow [0, 1]$, która spełnia następujące aksjomaty [Liu i Liu 2002]:

- 1) normalności: $Cr(\Theta) = 1$;
- 2) monotoniczności: $Cr(A) \leq Cr(B)$, zawsze gdy $A \subset B$;
- 3) samodualności: $Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 1$, gdzie $\bar{A}$ oznacza dopełnienie zbioru A ;
- 4) maksymalności: $Cr(\bigcup_i A_i) = \sup_i Cr(A_i)$.

Definicja 5 [Liu 2004]

Niech Θ będzie niepustym zbiorem, $P(\Theta)$ rodziną podzbiorów Θ , a Cr miarą wiarygodności. Wtedy tę trójkę $(\Theta, P(\Theta), Cr)$ nazywamy przestrzenią wiarygodności.

⁶ Pojęcie zmiennej rozmytej zostało wprowadzone w 1975 w pracy Kaufmanna [Kaufmann 1975], następnie rozwinięte przez Zadeha [1975] i Nahmiasa [1978], a zdefiniowane ponownie przez Liu [2004] w ujęciu teorii wiarygodności.

Definicja 6 [Liu 2004]

Przez zmienną rozmytą ξ będziemy rozumieć funkcję $\xi : (\Theta, P(\Theta), Cr) \rightarrow R$. Zależności pomiędzy miarą wiarygodności a funkcją przynależności zmiennej rozmytej określa twierdzenie:

Twierdzenie 1 [Liu 2004]. Niech ξ będzie zmienną rozmytą z funkcją przynależności μ . Wtedy dla każdego zbioru B liczb rzeczywistych zachodzi:

$$Cr\{\theta \in \Theta : \xi(\theta) \in B\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in \bar{B}} \mu(x) \right).$$

Wartość oczekiwana tak zdefiniowanej zmiennej przedstawia się następująco [Liu 2002]:

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} Cr\{\theta \in \Theta : \xi(\theta) \geq t\} dt - \int_{-\infty}^0 Cr\{\theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq t\} dt,$$

z założeniem, że obie funkcje są skończone. Dla trójkątnej zmiennej rozmytej⁷ z funkcją przynależności $\mu = (a, b, c)$ wartość oczekiwana wynosi: $E(\xi) = \frac{a + 2b + c}{4}$.

Wariancja została zdefiniowano [Liu 2004] jako:

$$V(\xi) = E\left[\theta \in \Theta : (\xi(\theta) - E(\xi))^2\right].$$

W przypadku zmiennej trójkątnej, wariancja wynosi:

$$V[\xi] = \frac{33\kappa^3 + 11\kappa\eta^2 + 21\kappa^2\eta - \eta^3}{384\kappa},$$

gdzie $\kappa = \max\{b - a; c - b\}$, $\eta = \min\{b - a; c - b\}$.

2. Zadanie maksymalizacji satysfakcji

Jako pierwszy zastosowanie teorii wiarygodności w problemie optymalizacji portfela inwestycyjnego zaproponował Peng w 2005 r. [Peng, Mok i Tse 2005]. W 2006 r. Huang omówiła szerzej zadania maksymalizacji miary wiarygodności [Huang 2006], rok później zaproponowała model średnia – wariancja [Huang 2007], a w 2008 [Huang 2008a] model z ograniczeniem ryzyka za pomocą entropii zmien-

⁷ Zmienną rozmytą nazywamy trójkątną, gdy jej funkcja przynależności jest liczbą rozmytą trójkątną.

nej rozmytej. Następnie model średnia – wariancja ewoluował w model średnia – semiwariancja [Huang 2008b], minmax średnia – wariancja [Huang 2010] oraz średnia wariancja – skośność [Li, Din i Kar 2010]. W 2010 zaproponowano model mierzący ryzyko rozmytą wartością zagrożoną, a następnie rozmytą warunkową wartością zagrożoną [Li, Qin i Yang 2010b]. Wymienione zadania opierają się na kryteriach maksymalizacji zysku i minimalizacji niepewności, definiowanych analogicznie do tych znanych z klasycznych modeli optymalizacji portfela. Główną zaletą podejścia rozmytego jest możliwość modelowania preferencji inwestorów, wartości lingwistycznych i wiedzy eksperckiej. Z tego powodu zaproponowane zostanie kryterium optymalizacji uwzględniające oczekiwania inwestora.

Do opisu problemu decyzyjnego będą wykorzystywane następujące oznaczenia:

- $x = [x_1, x_1, ..., x_n]$ – wektor udziałów n akcji w portfelu,
- ξ_i – rozmyta stopa zwrotu i -tej akcji,
- $\xi_r = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ – rozmyta stopa zwrotu portfela akcji,
- η – minimalny poziom zysku (wartości oczekiwanej portfela),
- δ – maksymalny poziom ryzyka (wariancji portfela),
- γ – funkcja oczekiwań inwestora.

W proponowanym modelu zakładamy, że:

- Θ – jest zbiorem wszystkich elementarnych stanów rynku;
- ξ – jest rozmytą stopą zwrotu, określającą przyszłą wartość stopy zwrotu;
- μ – jest funkcją przynależności rozmytej stopy zwrotu, określającą możliwość zaistnienia poszczególnych stóp zwrotu;
- $Cr : P(\Theta) \rightarrow [0,1]$ jest funkcją wiarygodności określającą wiarygodność zaistnienia poszczególnych stóp zwrotu.

Model średnia – wariancja [Huang 2007] zakłada analogicznie do modelu Markowitza, że inwestor dąży do maksymalizacji zysku mierzonego wartością oczekiwaną stopy zwrotu i jednocześnie minimalizuje niepewność mierzoną wariancją. Zadanie optymalizacyjne przedstawia się następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max E \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right), \\ \min V \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right), \end{array} \right. \text{przy ograniczeniach:}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Zadanie to wiąże się z problemami modelowania wielokryterialnego, dlatego zredukowano je do zadań jednokryterialnych. Zakłada się, że ze wszystkich portfeli charakteryzujących się stopą zwrotu większą od pewnego poziomu η najlepszy jest ten, który minimalizuje ryzyko, charakteryzując się najmniejszą wariancją. Natomiast wśród zbioru portfeli związanych z ryzykiem nie większym niż określony poziom δ celem jest odnalezienie portfela o największej stopie zwrotu. Co można zapisać jako następujące zadania:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max E \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right), \\ \text{przy ograniczeniach:} \\ V \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) \leq \delta, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min V \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right), \\ \text{przy ograniczeniach:} \\ E \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \right) \geq \eta, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Są to zadania programowania kwadratowego. Obok złożoności obliczeniowej, kłopoty inwestorowi może sprawić w praktyce wyznaczenie ograniczeń na maksymalną wariancję. Ponadto w ujęciu rozmytym nie bierze się pod uwagę korelacji walorów, zatem korzyści z dywersyfikacji są dużo niższe.

W proponowanym zadaniu optymalizacji inwestor definiuje swoje oczekiwania poprzez określenie satysfakcjonującej go w pełni stopy zwrotu r („stopa zwrotu ma wynieść co najmniej r ”). Zakładając ciągłość preferencji inwestora, stopa zwrotu nieco mniejsza od r będzie oczekiwana w stopniu mniejszym niż 1. Taką sytuację można zaprezentować w postaci zbioru rozmytego γ typu S. Zakładając równomierny wzrost zadowolenia wraz ze wzrostem stopy zwrotu, funkcja przynależności oczekiwań przedstawia się następująco⁸:

⁸ W skrócie określona zapisem $\gamma = (r_0, r_1)$.

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0, & \text{dla } r \leq r_0, \\ \frac{r - r_0}{r_1 - r_0}, & \text{dla } r_0 \leq r \leq r_1, \\ 1 & \text{dla } r \geq r_1. \end{cases}$$

Dzięki dostępowi do historycznych stóp zwrotu i opinii ekspertów można określić wiarygodność występowania poszczególnych ich wartości. Oczekiwania inwestora są zależne od jego awersji do ryzyka oraz parametru żalu. Poprzez parametr żalu rozumiemy poziom negatywnych emocji związanych z niewykorzystanymi szansami. Przez satysfakcję rozumiemy podobieństwo oczekiwanych stóp zwrotu i wiarygodności wystąpienia danych stóp. Zatem funkcja satysfakcji zdefiniowana jest następująco:

$$S = \frac{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \gamma)}{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \gamma) + \alpha M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \bar{\gamma}) + \beta M(\overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)} \cap \gamma)},$$

gdzie:

- M – miara zbioru rozmytego;
- α – parametr awersji do ryzyka;
- β – parametr żalu;
- $Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \gamma$ – poziom spełnienia przez dany portfel oczekiwań;
- $Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \bar{\gamma}$ – niebezpieczeństwo wyniku poniżej oczekiwań;
- $\overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)} \cap \gamma$ – poziom, na którym inne portfele spełniałyby oczekiwania.

W przypadku inwestorów skupionych na zyskach, zatem tych o wysokim parametrze żalu, do obliczenia podobieństwa będzie brany jedynie stopień spełnienia oczekiwań oraz poziom niewypełnienia oczekiwań, a więc funkcja satysfakcji przyjmie następującą postać:

$$S = \frac{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \gamma)}{M(Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r) \cap \gamma) + M(\overline{Cr(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r)} \cap \gamma)}.$$

Natomiast w przypadku inwestorów o wysokiej awersji do ryzyka, satysfakcja określona będzie poprzez:

$$S = \frac{M\left(Cr\left(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r\right) \cap \gamma\right)}{M\left(Cr\left(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r\right) \cap \gamma\right) + M\left(Cr\left(\theta \in \Theta : \xi(\theta) = r\right) \cap \bar{\gamma}\right)}.$$

Zakładając brak krótkiej sprzedaży i sumowanie się wag: awersji do ryzyka i żalu, zadanie optymalizacji portfela przedstawia się następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max S\left(Cr\left(\theta \in \Theta : \sum_{i=1}^n x_i \xi_i(\theta) = r\right), \gamma\right), \\ \text{przy ograniczeniach:} \\ \alpha + \beta = 1, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Inwestor uznaje za najbardziej satysfakcjonujący portfel, którego wiarygodność zaistnienia poszczególnych stóp zwrotu jest najbardziej podobna do jego oczekiwań.

Zadanie zostanie zilustrowane dwoma przykładami wyboru portfela z trzech aktywów.

Przykład 1.

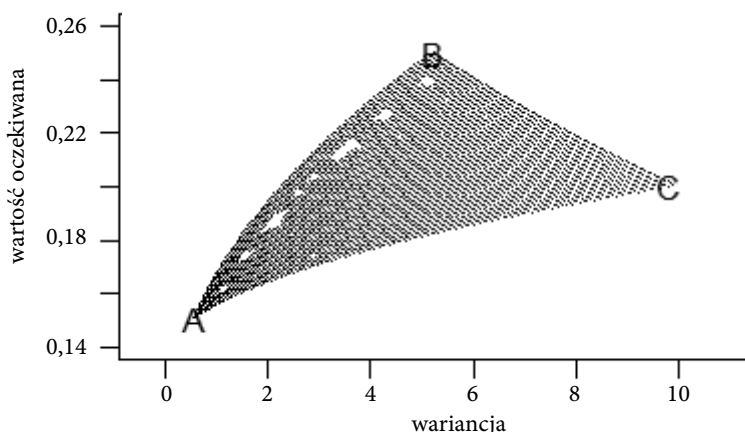
Wybieramy portfel złożony z trzech akcji opisanych rozmytymi stopami zwrotu: około 0,05, około -0,5, około -0,1 (tabela 1). Oczekiwania inwestora będą w pełni spełnione przez stopę zwrotu powyżej 5, ale już częściowo przez każdą stopę większą od 0,2.

Tabela 1. Przykładowe rozmyte stopy zwrotu aktywów, ich wartości oczekiwane i wariancje

L.p.	μ_i	$E[\xi]$	$V[\xi]$
1	$(-1,5; 0,05; 2)$	0,15	0,5559
2	$(-4; -0,5; 6)$	0,25	5,2087
3	$(-7; -0,1; 8)$	0,20	9,9531

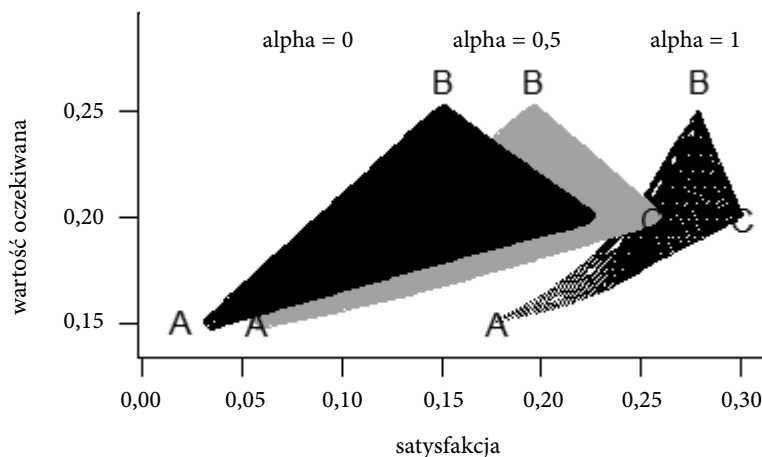
Rozmyta stopa zwrotu akcji pierwszej ma najmniejszą wartość oczekiwaną i najmniejszą wariancję, drugiej - największą wartość oczekiwaną, ale znacznie większą wariancję od pierwszej i mniejszą od trzeciej. Rozmyta stopa zwrotu akcji trzeciej ma największą wariancję, jednocześnie stopy aż do wartości 8 są nadal

wiarygodne. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych w zależności wariancja – wartość oczekiwana przedstawia rysunek 1, na którym punkt A odpowiada portfelowi $x = (1,0,0)$, punkt B: $x = (0,1,0)$, C: $x = (0,0,1)$. Portfele efektywne, czyli takie, które przy danej stopie zwrotu charakteryzuje najniższe ryzyko, a dla danego poziomu ryzyka najwyższa stopa zwrotu, znajdują się na krzywej łączącej punkty A i B.



Rysunek 1. Obszar rozwiązań dopuszczalnych zadania średnia – wariancja

Rysunek 2 przedstawia wartość oczekiwaną poszczególnych rozwiązań dopuszczalnych dla danego poziomu satysfakcji, przy różnych poziomach awersji do ryzyka. Punkty A odpowiadają portfelowi $x = (1,0,0)$, punkty B: $x = (0,1,0)$, C: $x = (0,0,1)$



Rysunek 2. Poziomy satysfakcji i wartości oczekiwanej dla portfeli dopuszczalnych

Jak można zaobserwować na rysunku 3, niezależnie od parametrów α i β , portfel o maksymalnej satysfakcji (punkt C) nie jest portfelem o największej wartości oczekiwanej, a tym o najwyższej wariancji. Portfele inwestorów o wyższej wartości parametru żalu (β) charakteryzują się wyższym poziomem satysfakcji wraz ze wzrostem wartości oczekiwanej. W przykładzie 1 rozwiązanie optymalne zadania satysfakcji nie dywersyfikuje portfela, jest również niezależnie od parametrów żalu i awersji do ryzyka $x = [0,0,1]$.

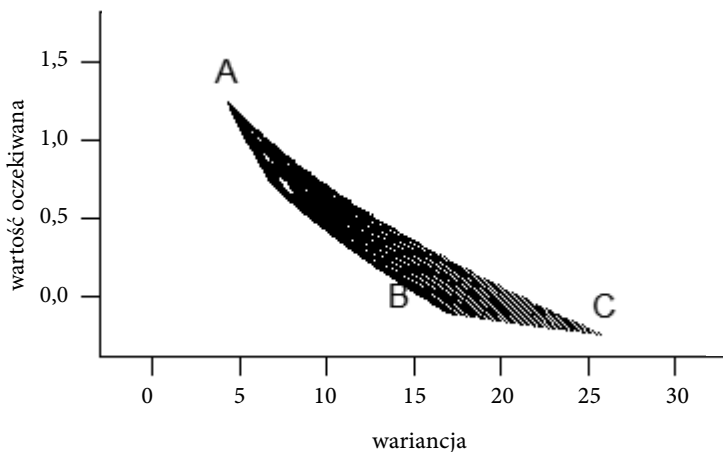
Przykład 2.

Inwestor, o tej samej funkcji oczekiwania co w przykładzie 1., buduje portfel z aktywów przedstawionych w tabeli 2. Zbiór portfeli dopuszczalnych zadania średnia – wariancja przedstawia rysunek 3.

Tabela 2. Rozmyte stopy zwrotu aktywów z przykładu 2, ich wartość oczekiwana i wariancja

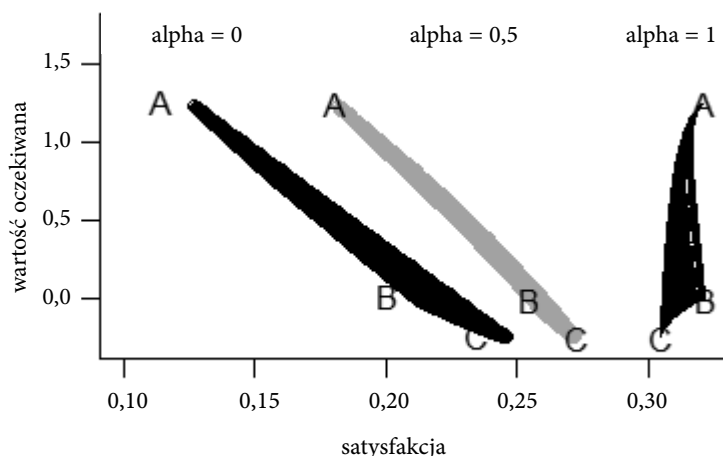
L.p.	μ_i	$E[\xi]$	$V[\xi]$
1	$(-4; 2; 5)$	1,15	4,3242
2	$(-8; -1; 10)$	0	15,9318
3	$(-13; 1; 10)$	-0,25	25,9191

Zadanie średnia – wariancja za portfel optymalny wybierze portfel składający się z pierwszego waloru o minimalnej wariancji i maksymalnej wartości oczekiwanej (rysunek 3)



Rysunek 3. Obszar rozwiązań dopuszczalnych zadania średnia – wariancja

W przypadku zadania satysfakcji inwestora wynik optymalizacji zależny jest od jego podejścia do ryzyka (rysunek 4). Inwestor skłonny do ryzyka (parametr awersji do ryzyka $\alpha = 0$, skupiony na zyskach (parametr żalu $\beta = 0$) wybierze portfel $x = (0,0,1)$ o najwyższej wariancji, ale również najniższej wartości oczekiwanej, natomiast inwestor o wyższej awersji ($\alpha = 1$) do ryzyka portfel $x = (0,1,0)$ o średniej spośród tych trzech aktywów wariancji. Jak ukazał przykład, wybory zależne są od przyjętego kryterium zadania, jak również przyjętych parametrów w zadaniu maksymalizacji satysfakcji.



Rysunek 4. Poziomy satysfakcji i wartości oczekiwanej dla portfeli dopuszczalnych przykładu 2

Zakończenie

W artykule zaproponowano jednokryterialny model optymalizacji portfela akcji na podstawie miary satysfakcji. Autorka proponuje zastąpić kryteria maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka kryterium maksymalizacji satysfakcji. Dzięki temu inwestor, definiując zadanie, musi jedynie określić własne oczekiwania oraz indywidualny stosunek do ryzyka. Przedstawione przykłady potwierdziły, że maksymalizowanie wartości oczekiwanej nie jest jednoznaczne z maksymalizacją satysfakcji inwestora. Zadanie maksymalizacji satysfakcji skupia się przede wszystkim na wiarygodności wystąpienia wyższych, a więc oczekiwanych przez inwestora stóp zwrotu, a nie jak zadanie średnia – wariancja – na wartości uśrednionej zysku. Jednocześnie przedstawione przykłady, jak i pierwsze testy empiryczne zadania maksymalizacji satysfakcji ukazały

problem z niską dywersyfikacją rozwiązania. Dlatego sugeruje się nałożenie dodatkowego ograniczenia na maksymalny poziom udziału w portfelu pojedynczego aktywa: niższy od 1, np. 0,3. Należy zbadać, czy problem niskiej dywersyfikacji może rozwiązać zmiana operatora przecięcia zbiorów rozmytych. Dalsze badania nad modelem będą miały charakter głównie badania empirycznej skuteczności zadania. Z punktu widzenia użyteczności zadania istotne jest także zbadanie wpływu kształtu funkcji oczekiwań inwestora na wynik optymalizacji.

Bibliografia

- Bachmann, K., Hens T., 2008, *Behavioral Finance for Private Banking*, John Wiley and Sons, Chichester.
- Bouchon-Meunier, B., Rifqi, M., Bothorel, S., 1996, *Towards General Measures of Comparison of Objects*, Fuzzy Sets System, vol. 84(2), s. 143–153.
- Bygrave, W.D., Hofer, Ch.W., 1991, *Theorizing about Entrepreneurship*, Entrepreneurship Theory and Practice, vol. 16, s. 13–22.
- Cross, V.V., Sudkamp, T.A., 2002, *Similarity and Compatibility in Fuzzy Set Theory: Assessment and Applications*, Physica-Verlag Heidelberg.
- Huang, X., 2006, *Fuzzy Chance-constrained Portfolio Selection*, Applied Mathematics and Computation, vol. 177(2), s. 500–507.
- Huang, X., 2007, *Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, vol. 18(4), s. 383–390.
- Huang, X., 2008a, *Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 16, s. 1096–1101.
- Huang, X., 2008b, *Mean-semivariance Models for Fuzzy Portfolio Selection*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 217(1), s. 1–8.
- Kaufmann, A., 1975, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press.
- Kotler, P., 1967, *Marketing Management: Analysis, Planning, and Control*, Prentice-Hall.
- Li, X., Qin, Z., Kar, S., 2010, *Mean-variance-skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Returns*, European Journal of Operational Research, 202(1), s. 239–247.
- Li X., Qin Z., Yang, L., 2010, *A Chance-constrained Portfolio Selection Model with Risk Constraints*, Applied Mathematics and Computation, 217(2), s. 949–951.
- Liu, B., 2004, *Uncertainty Theory: an Introduction to Its Axiomatic Foundations*, Springer.
- Liu, B., Liu, Y.K., 2002, *Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, no. 10, s. 445–450.
- Nahmias, S., 1978, *Fuzzy Variables*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 1(2), s. 97–110.
- Markowitz, H., 1952, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, vol. 7, s. 77–91.
- Peng, J., Mok, H.M.K., Tse, W.M., 2005, *Credibility Programming Approach to Fuzzy Portfolio Selection Problems*, Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, vol. 4.
- Tversky, A., 1977, *Features of Similarity*, Psychological Review, vol. 84, s. 327–352.
- Zadeh, L.A., 1965, *Fuzzy Sets*, Information and Control, vol. 8(3), s. 338–353.

Zadeh, L.A., 1975, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*, Information Sciences, vol. 8(4), s. 301–357.

Zielonka P. , 2008, *Behawioralne aspekty inwestowania na rynku papierów wartościowych*, CeDeWu, Warszawa.