

Michał Wójtowicz

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

email: michwojt@gmail.com

KONSTRUKCJA PORTFELA INWESTYCJI Z ZASTOSOWANIEM KRYTERIUM KELLY'EGO

Streszczenie: Przedmiotem artykułu jest zagadnienie zarządzania wielkością pozycji, czyli sposobu, w jaki inwestor angażuje swój majątek w kolejne inwestycje. W przypadku inwestora stosującego strategię inwestycyjną o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, zarządzanie pozycją decyduje o tym, czy inwestor osiągnie zysk, czy nie, a jeżeli tak, to ile on wyniesie.

W pierwszej części artykułu analizowana jest strategia stosowana na rynku, na którym inwestor może osiągnąć zysk o pewnej wartości lub ponieść stratę o pewnej wartości. Chodzi o to, w jaki sposób inwestor powinien angażować swój majątek, aby zmaksymalizować jego wartość. W drugiej części zostały omówione konsekwencje takiego sposobu zarządzania majątkiem przez inwestora. W części trzeciej omówiono maksymalizację majątku poprzez zarządzanie wielkością pozycji na rynku, na którym zysk lub strata z pojedynczej inwestycji może przyjmować wiele wartości oraz podano praktyczny przykład zastosowania takiego podejścia.

Słowa kluczowe: zarządzanie wielkością pozycji, inwestowanie, rynki finansowe, giełda, zysk.

Klasyfikacja JEL: A10, C61, C62, C63, G11.

BUILDING AN INVESTMENT PORTFOLIO USING THE KELLY CRITERION

Abstract: This article describes the issue of financial management, that is the way in which an investor decides how much to put into various investments. If an investor uses a strategy with positive expectations then correct management determines whether the investor will achieve a profit or not and, if so, how much it will be. The first part of the article analyses the case of using a strategy in the market in which an investor can make a fixed profit or fixed loss. The problem is how investor should manage their investments in order to maximize their value. The second section describes the consequences of an investor using this method of asset man-

agement. The third section describes the problem of maximizing wealth through managing market portfolio size when the profit or loss on a single investment can have multiple values, and provides a practical example of the use of such an approach.

Keywords: money management, investment, capital markets, Stock Exchange, profit.

Wstęp

Podstawowy problem każdego inwestora polega na znalezieniu strategii o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, czyli takiej, która w długim okresie przyniesie mu zysk. Stosowanie takiej strategii to warunek konieczny, ale niewystarczający, do osiągnięcia zysku w długim okresie. Wielkość zysku oraz to, czy zostanie on w ogóle osiągnięty, zależy bowiem od sposobu, w jaki inwestor angażuje swój majątek w kolejne inwestycje.

Aby zobrazować to zagadnienie, załóżmy, że inwestor stosuje pewną strategię inwestycyjną o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji na pewnym rynku finansowym. Ponadto chce on zmaksymalizować majątek w długim okresie. W tym momencie pojawia się pytanie o to, jaką część swojego kapitału inwestor powinien zaangażować w pojedynczą inwestycję. Ta kwestia jest szczególnie istotna w przypadku takich rynków jak rynek walutowy, gdzie instytucje finansowe umożliwiają inwestorom obracanie kwotą wielokrotnie przewyższającą ich majątek.

Odpowiedzi na ten problem nie daje żadna z najbardziej popularnych metod konstrukcji portfela papierów wartościowych, takich jak metoda Markowitza czy metoda sugerowana przez teorię rynku kapitałowego [Brown i Reilly 2001, s. 353–378, 386–398]. Wynika to stąd, że portfel skonstruowany tymi popularnymi metodami odzwierciedla preferencje inwestora, ale tylko z punktu widzenia wartości oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka portfela. Tymczasem preferencji inwestora nie jesteśmy w stanie dobrze opisać za pomocą tylko dwóch wymienionych charakterystyk.

Gdybyśmy bowiem uznali, że inwestor dąży do maksymalizacji wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela, to powinien on w pełni wykorzystać oferowaną mu dźwignię finansową, a zatem angażować w każdą inwestycję więcej niż ma. W takim przypadku seria stratnych transakcji, a nawet jedna zła inwestycja, może spowodować bankructwo inwestora. Ponieważ żadna taka strategia inwestycyjna nie jest wolna od możliwości strat, więc prędzej czy później inwestor musiałby zbankrutować. Nie można zatem przyjąć, że w długim okresie inwestor zmaksymalizuje wartość oczekiwaną swojego

portfela, bo może zbankrutować. Gdybyśmy uznali, że inwestor dąży do minimalizacji ryzyka portfela, to nie powinien on w ogóle podejmować inwestycji, ale to nie byłaby droga do maksymalizacji majątku inwestora w długim okresie.

Odpowiedź na postawione na początku pytanie dostarcza tzw. kryterium Kelly'ego [Kelly 1956]. Metoda inwestowania opierająca się na tym kryterium polega na angażowaniu przez inwestora w każdą inwestycję pewnej części jego obecnego majątku. Wielkość tę określa się w taki sposób, aby zmaksymalizować wartość oczekiwaną względnego przyrostu majątku inwestora. Tak skonstruowany portfel ma wiele pożądanych przez inwestora cech. Maksymalizuje on majątek inwestora w długim okresie [Breiman 1961, s. 72] lub minimalizuje oczekiwany, w porównaniu z portfelami skonstruowanymi innymi metodami, czas potrzebny do osiągnięcia ustalonego celu finansowego [Breiman 1961, s. 68], a posługujący się nim inwestor nigdy nie bankrutuje [Hakansson i Miller 1975].

1. Strategia inwestycyjna. Model dwumianowy

Założmy, że inwestor posługuje się strategią inwestycyjną o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, która na danym rynku finansowym pozwala mu osiągnąć dwa wyniki inwestycyjne: zysk równy a z prawdopodobieństwem p lub stratę równą b z prawdopodobieństwem q , przy czym $a, b, p, q > 0$ oraz $p + q = 1$.

Niech Y_1 oznacza zmienną losową określającą wynik finansowy inwestora posługującego się tą strategią. Wówczas $E(Y_1) = ap - bq > 0$, bo – z założenia – inwestor posługuje się strategią inwestycyjną o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji. (Gdyby bowiem inwestor posługiwał się strategią o ujemnej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, to – średnio rzecz biorąc – każda inwestycja byłaby dla niego stratna, a więc zmniejszałaby jego majątek i prowadziła do bankructwa. Posługiwanie się taką strategią nie miałoby sensu).

Niech $Z_1 = \frac{Y_1}{b}$ będzie zmienną losową określającą wynik finansowy inwestora podzielony przez stratę. Wówczas:

$$E(Z_1) = \frac{E(Y_1)}{b} > 0. \quad (1)$$

Przyjmijmy, że inwestor dokonuje N inwestycji, zyskując u razy stawkę a i w razy tracąc stawkę b , przy czym $u + w = N$. Stąd jego majątek po N inwestycjach wynosi:

$$\prod_{i=1}^N \left(1 + f \cdot \left(\frac{-inwestycja_i}{strata} \right) \right),$$

gdzie:

$inwestycja_i$ – zysk/strata inwestora z pojedynczej jednostki inwestycyjnej z i -tej inwestycji;

$strata$ – strata, którą może ponieść inwestor na jednostce inwestycyjnej, np. akcji;

f – wybrany przez inwestora dzielnik z przedziału $(0,1)$.

Oczywiście strata inwestora jest ujemna. Ponadto ponieważ na pojedynczej jednostce inwestycyjnej inwestor może osiągnąć tylko dwa wyniki inwestycyjne, to jeśli w i -tej inwestycji osiągnie ujemny wynik to zawsze jest on równy z góry znanej stracie. Średnia geometryczna majątku inwestora H po N inwestycjach wynosi zatem [Vince 1990, s. 85]:

$$H = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \left(1 + f \cdot \left(\frac{-inwestycja_i}{strata} \right) \right)}.$$

W modelu dwumianowym H wynosi:

$$H = \sqrt[N]{\left(1 + f \frac{a}{b} \right)^u \cdot \left(1 - f \frac{b}{b} \right)^w} = \sqrt[N]{\left(1 + f \frac{a}{b} \right)^u \cdot (1-f)^w} = \left(1 + f \frac{a}{b} \right)^{\frac{u}{N}} \cdot (1-f)^{\frac{w}{N}},$$

więc przy dostatecznie wysokiej wartości N liczby $\left(1 + f \frac{a}{b} \right)^{\frac{u}{N}}$ oraz $(1-f)^{\frac{w}{N}}$ będą dobrze przybliżane (zgodnie z prawem wielkich liczb), odpowiednio, liczbami $\left(1 + f \frac{a}{b} \right)^p$ oraz $(1-f)^q$. W dalszej części pracy, dla uproszczenia rozważań, będziemy przyjmować, że:

$$H = \left(1 + f \frac{a}{b} \right)^p \cdot (1-f)^q,$$

posługując się często (nieprecyzyjnym¹, ale użytecznym) założeniem, że $p = \frac{u}{N}$ oraz $q = \frac{w}{N}$.

Ustalony przez inwestora dzielnik f należy rozumieć jako wielkość, która pozwala mu określić, ile jednostek inwestycyjnych, np. akcji, powinien on nabyć przy danym majątku i możliwej stracie. Dla przykładu, założmy, że największa możliwa strata inwestora wynosi 100 dolarów, $f = 0,25$. Wówczas $\frac{100}{0,25} = 400$, czyli inwestor powinien nabyć jedną akcję na każde 400 dolarów swojego majątku [Vince 1990, s. 80, 88].

Można założyć, że inwestor jest w stanie nabyć więcej jednostek inwestycyjnych niż wynikałoby to ze stanu jego majątku. Takie założenie pokrywa się z rzeczywistością, ponieważ niektóre instytucje finansowe oferujące swoim klientom dźwignię finansową, pozwalają na zakup i sprzedaż jednostek inwestycyjnych w liczbie, która przewyższa (czasem wielokrotnie) liczbę wynikającą ze stanu majątku inwestora.

H jest funkcją dzielnika f , więc będziemy często pisać zamiast H . Określa ona średni względny stan majątku po pojedynczej transakcji inwestora posługującego się dzielnikiem f . Funkcja H ma ekstremum w tym samym punkcie co funkcja $G = \ln(H)$, co wynika z różnowartościowości i monotoniczności funkcji logarytmicznej. Funkcja G jest funkcją pomocniczą służącą do wyznaczenia dzielnika f , dla którego funkcja H osiąga maksymalną wartość. Oznaczając $A = \frac{a}{b}$, widzimy, że nierówność (1) przyjmuje wygodniejszą postać:

$$E(Z_1) = Ap - q > 0. \quad (2)$$

Ponadto:

$$G(f) = \ln H(f) = p \cdot \ln(1 + fA) + q \cdot \ln(1 - f),$$

Pochodna funkcji G względem f wynosi:

$$G'(f) = \frac{pA}{1 + fA} - \frac{q}{1 - f}. \quad (3)$$

Ponieważ f należy do przedziału $(0,1)$, to mianownik żadnego ułamka w (3) nie przyjmuje wartości równej zero.

¹ Założenie jest precyzyjne przy liczbie transakcji historycznych N dążącej do nieskończoności. Jednak w praktyce inwestor rzadko jest w stanie dostarczyć taką wielkość próby.

Wiadomo, że ciągła i różniczkowalna funkcja określona na przedziale otwartym może osiągać ekstremum w punkcie, w którym jej pierwsza pochodna osiąga wartość zero. Wobec tego, w celu wyznaczenia punktów, w których funkcja G , a więc również funkcja H , może osiągać maksimum, należy przyrównać prawą stronę równania (3) do zera:

$$\frac{pA}{1+fA} - \frac{q}{1-f} = 0. \quad (4)$$

Niech f^* będzie rozwiązaniem równania (4):

$$f^* = \frac{pA-q}{A} = p - \frac{q}{A}. \quad (5)$$

Druga pochodna funkcji G jest równa:

$$G''(f) = -\frac{pA^2}{(1+fA)^2} - \frac{q}{(1-f)^2},$$

więc jest ujemna dla dowolnego f należącego do przedziału $(0,1)$, zatem osiąga maksimum w punkcie f^* . Wobec tego f^* jest dzielnikiem maksymalizującym wartość oczekiwaną względnego przyrostu majątku inwestora. Majątek inwestora posługującego się tym dzielnikiem będzie przy liczbie transakcji N dążącej do nieskończoności większy niż w przypadku, gdyby posługiwał się jakimkolwiek innym dzielnikiem. Dzielnik o takiej własności będziemy dalej nazywać optymalnym dzielnikiem.

2. Własności portfela inwestycji skonstruowanego na podstawie kryterium Kelly'ego w modelu dwumianowym

2.1. Wrażliwość f^* na relację zysku do straty

Własność 1. Wzrost/spadek stosunku zysku do straty powoduje wzrost/spadek f^ .*

Dowód wynika z równości (5): jeśli A rośnie/maleje, to ułamek $\frac{q}{A}$ maleje/rośnie, więc wartość f^* rośnie/maleje.

Oznacza to, że jeśli zwiększy/zmniejszy się stosunek zysku do straty, to inwestor będzie musiał angażować większą/mniejszą część swojego majątku w pojedyńczą inwestycję.

2.2. Granica f^* przy stosunku $\frac{\text{zysk}}{|\text{strata}|}$ rosnącym do nieskończoności

Własność 2. Wzrost stosunku zysku do straty może spowodować wzrost f^ do poziomu nie większego niż prawdopodobieństwo zysku.*

Dowód wynika z faktu, że funkcja $\gamma(A) = p - \frac{q}{A}$ jest funkcją ściśle rosnącą (dla $A > \frac{q}{p}$) do p .

Oznacza to, że jeśli zwiększy się stosunek zysku do straty, to inwestor nie zwiększy zaangażowania swojego majątku w pojedynczą inwestycję ponad poziom wyznaczony przez prawdopodobieństwo zysku.

2.3. Wrażliwość f^* na prawdopodobieństwo zysku

Własność 3. Wzrost/spadek prawdopodobieństwa zysku powoduje wzrost/spadek f^ .*

Własność jest natychmiastową konsekwencją wzoru (5), mamy:

$$f^* = p - \frac{q}{A} = p - \frac{1-p}{A} = p \cdot \left(1 + \frac{1}{A}\right) - \frac{1}{A}, \quad (6)$$

stąd, jeśli p rośnie, to f^* też rośnie.

Oznacza to, że jeśli prawdopodobieństwo zysku będzie większe/mniejsze, to w pojedynczą inwestycję inwestor będzie musiał angażować większą/mniejszą część swojego majątku.

2.4. Granica f^* przy prawdopodobieństwie zysku dążącym do jedności

Własność 4. Wzrost prawdopodobieństwa zysku powoduje wzrost f^ , ale do poziomu nie większego niż 1.*

Dowód wynika z równości (6) i własności 3: jeśli $p = 1$, to $f^* = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{A}\right) - \frac{1}{A} = 1$.

Oznacza to, że górna granica wzrostu zaangażowania majątku inwestora to 1.

2.5. Minimalne obsunięcie kapitału

Obsunięcie kapitału definiuje się jako maksymalny procentowy spadek majątku inwestora. *HPR (holding period returns)*, czyli zwrot majątku z inwestycji,

to określony procentowo oczekiwany stan majątku inwestora po jednej inwestycji. Mamy: $HPR = 1$ plus stopa zwrotu osiągnięta przez inwestora [Vince 1990, s. 68].

Własność 5. Minimalne obsunięcie majątku inwestora (drawdown) posługującego się dzielnikiem f^ jest równe f^* .*

Dowód. W naszym przypadku, dla majątku inwestora posługującego się dzielnikiem f , zachodzi równość [Vince 1990, s. 85]:

$$HPR = 1 + f \cdot \left(\frac{-\text{inwestycja}}{\text{największa strata}} \right), \quad (7)$$

Ponieważ $q > 0$, to prawdopodobieństwo tego, że inwestor poniesie stratę, jest dodatnie, a gdy taka nastąpi, to zgodnie z wzorem (7) majątek inwestora zmaleje o f procent.

Oznacza to, że strategie inwestycyjne o wysokim optymalnym dzielniku są związane z ryzykiem dużych spadków majątku inwestora.

2.6. Majątek inwestora po dwóch kolejnych inwestycjach zakończonych różnym wynikiem

Własność 6. Jeśli w dwóch kolejnych inwestycjach inwestor albo zyska i straci, albo straci i zyska, to jego majątek się zmniejszy.

Dowód [Ziemba 2005, s. 8]. Załóżmy, że inwestor rozpoczyna inwestycje z majątkiem B . Po dwóch inwestycjach takwota wyniesie $B \cdot (1 - f) \cdot (1 + f) = B \cdot (1 - f^2)$, która jest mniejsza od B , ponieważ $(1 - f^2) < 1$.

Oznacza to, że strategia inwestycyjna o zerowej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji oraz równym prawdopodobieństwie zysku i straty przynosi straty.

2.7. Ryzyko inwestora w sytuacji wysokiego prawdopodobieństwie zysku

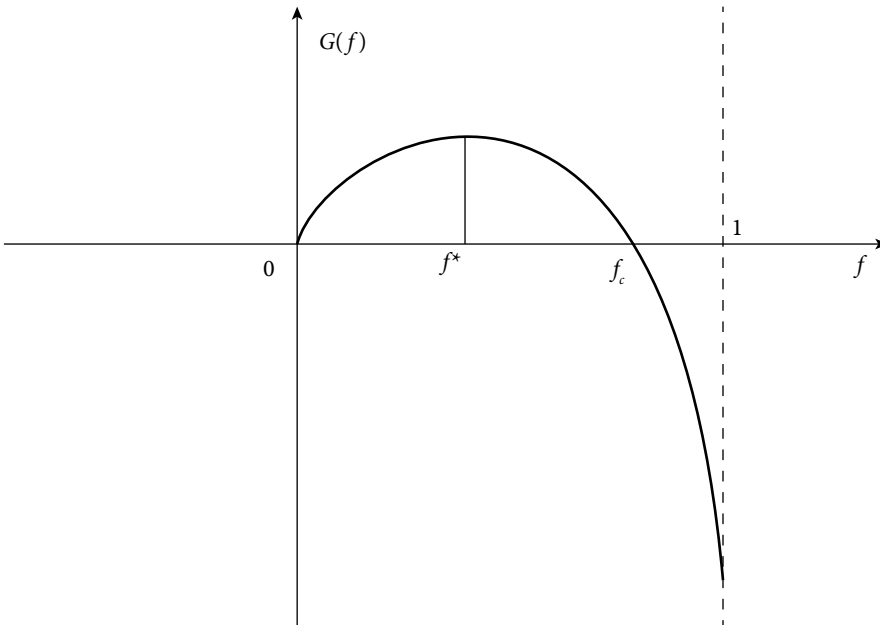
Własność 7. W przypadku wysokiego prawdopodobieństwa zysku inwestor stosujący dzielnik f^ ryzykuje dużą częśćią swojego majątku.*

Własność 7 ilustruje przykład. Niech $p = 0,95$, $A = 1$, $f^* = \frac{0,95 - 0,05}{1} = 0,9$, czyli w jednej inwestycji inwestor ryzykuje utratą dziewięćdziesięciu procent swojego majątku.

Oznacza to, że jeśli inwestor posługuje się strategią o wysokim prawdopodobieństwie zysku, to ryzykuje dużymi spadkami swojego majątku.

2.8. Krzywa zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora

Własność 8. Wykres funkcji $G(f)$, zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora, ma następującą postać na przedziale $[0,1)$:



Rysunek 1. Krzywa zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora

Źródło: [Thorpe 2007, s. 6]

Dowód. Dowód został pierwotnie sformułowany przez Thorpe'a [2007, s. 5] dla szczególnego przypadku modelu dwumianowego, gdy $A = 1$ oraz $p > 0,5$, ma jednak zastosowanie również do przypadku ogólnego.

Zauważmy, że $G'(0) = pA - q = E(Z_1) > 0$, więc funkcja G rośnie w punkcie zero. Ponadto:

$$\lim_{f \rightarrow 1^-} G(f) = \lim_{f \rightarrow 1^-} [p \cdot \ln(1 + fA) + q \cdot \ln(1 - f)] = -\infty. \quad (8)$$

Wiemy już, że $G''(f) < 0$ na przedziale $[0,1)$, czyli funkcja $G(f)$ jest na tym przedziale wypukła do góry. Wobec tego, a także z (8) i z faktu, że $G'(0) > 0$ wynika, że funkcja $G'(f)$ jest dodatnia w otoczeniu zera, a następnie maleje do minus nieskończoności, gdy f dąży do jedności. Funkcje G oraz G' są ciągłe, co oznacza, że istnieje taki dzielnik f^* należący do przedziału $(0,1)$, że $G'(f^*) = 0$ i $G''(f^*) < 0$, czyli dzielnik, dla którego funkcja $G(f)$ osiąga maksimum. Ponadto $G(0) = 0$ i $\lim_{f \rightarrow 1^-} G(f) = -\infty$, więc musi istnieć liczba f_c taka, że $0 < f^* < f_c < 1$ oraz $G(f_c) = 0$.

Wykres (rysunek 1) pokazuje, że inwestor posługujący się strategią o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji może ponosić straty.

2.9. Możliwość straty w przypadku wyboru innego dzielnika niż f^*

Własność 9. Inwestor stosujący strategię o dodatniej wartości oczekiwanej może zbankrutować.

Dowód. Ta własność wynika stąd, że dla $f > f_c$ mamy $G(f) < 0$, i z następującego twierdzenia, sformułowanego i udowodnionego przez Thorpe'a [2007, s. 5]:

Twierdzenie 1. Niech X_n będzie zmienną losową stanu majątku inwestora inwestującego stawkę f w chwili $n = 1, 2, \dots$. Wówczas, jeżeli $G(f) > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$, a gdy $G(f) < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$.

Własność ta pokazuje istotność pytania postawionego we wstępie artykułu. Wynika z niej, że nawet jeśli inwestor stosuje strategię o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, ale źle angażuje swój majątek, to w dłuższej perspektywie czasu zbankrutuje.

3. Strategia inwestycyjna. Model wielomianowy

Rozważmy teraz naturalne uogólnienie strategii inwestycyjnej modelu dwumianowego omówionego w poprzednich rozdziałach. Inwestor posługuje się strategią o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji, uzyskując $a_1, a_2, \dots, a_n$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \dots, p_n$ oraz traci stawki $b_1, b_2, \dots, b_m$ z prawdopodobieństwami $q_1, q_2, \dots, q_m$, przy czym $a_i, b_j, p_i, q_j > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ oraz $p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_1 + q_2 + \dots + q_m = 1$. Poza tym, niech b oznacza maksymalną stratę inwestora, tj. $b = \max\{b_1, b_2, \dots, b_m\} > 0$.

Niech Y_1 oznacza zmienną losową określającą wynik finansowy inwestora. Zakładamy, że $E(Y_1) = \sum_{i=1}^n a_i p_i - \sum_{j=1}^m b_j q_j > 0$, bo – jak wspomniano – stosowanie strategii inwestycyjnej ma sens tylko wtedy, gdy ma ona dodatnią wartość oczekiwaną wyniku z inwestycji.

Niech $Z_1 = \frac{Y_1}{b}$ będzie zmienną losową określającą wynik finansowy inwestora podzielony przez największą możliwą stratę. Wówczas $E(Z_1) = \frac{E(Y_1)}{b}$.

Przyjmijmy teraz, że inwestor dokonuje N inwestycji, zyskując u_1 razy stawkę a_1 , u_2 razy stawkę a_2 , ..., u_n razy stawkę a_n , oraz stracił w_1 razy stawkę $-b_1$, w_2 razy stawkę $-b_2$, ..., w_m razy stawkę $-b_m$, przy czym $u_1 + \dots + u_n + w_1 + \dots + w_m = N$. Stąd jego majątek po N inwestycjach wynosi:

$$\left(1 + f \frac{a_1}{b}\right)^{u_1} \dots \left(1 + f \frac{a_n}{b}\right)^{u_n} \left(1 - f \frac{b_1}{b}\right)^{w_1} \dots \left(1 - f \frac{b_m}{b}\right)^{w_m},$$

więc średnia geometryczna H majątku inwestora po N inwestycjach, wynosi:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt[N]{\left(1 + f \frac{a_1}{b}\right)^{u_1} \dots \left(1 + f \frac{a_n}{b}\right)^{u_n} \left(1 - f \frac{b_1}{b}\right)^{w_1} \dots \left(1 - f \frac{b_m}{b}\right)^{w_m}} \\ &= \left(1 + f \frac{a_1}{b}\right)^{\frac{u_1}{N}} \dots \left(1 + f \frac{a_n}{b}\right)^{\frac{u_n}{N}} \left(1 - f \frac{b_1}{b}\right)^{\frac{w_1}{N}} \dots \left(1 - f \frac{b_m}{b}\right)^{\frac{w_m}{N}}, \end{aligned}$$

zatem przy dostatecznie wysokiej wartości N liczby $\left(1 + f \frac{a_i}{b}\right)^{\frac{u_i}{N}}$ oraz $\left(1 - f \frac{b_j}{b}\right)^{\frac{w_j}{N}}$ będą dobrze przybliżane (zgodnie z prawem wielkich liczb), odpowiednio, liczbami $\left(1 + f \frac{a_i}{b}\right)^{p_i}$ oraz $\left(1 - f \frac{b_j}{b}\right)^{q_j}$. W dalszej części pracy będziemy przyjmować, że:

$$H = \left(1 + f \frac{a_1}{b}\right)^{p_1} \dots \left(1 + f \frac{a_n}{b}\right)^{p_n} \left(1 - f \frac{b_1}{b}\right)^{q_1} \dots \left(1 - f \frac{b_m}{b}\right)^{q_m},$$

posługując się użytecznym założeniem, że $p_i = \frac{u_i}{N}$ oraz $q_j = \frac{w_j}{N}$.

Funkcja H ma ekstremum w tym samym punkcie co funkcja $G = \ln(H)$.
 Oznaczmy $A_1 = \frac{a_1}{b}$, $A_2 = \frac{a_2}{b}$, ..., $A_n = \frac{a_n}{b}$, $B_1 = \frac{b_1}{b}$, $B_2 = \frac{b_2}{b}$, ..., $B_m = \frac{b_m}{b}$.
 Wtedy:

$$E(Z_1) = \sum_{i=1}^n A_i p_i - \sum_{j=1}^m B_j q_j.$$

Ponadto:

$$G = p_1 \ln(1 + fA_1) + \dots + p_n \ln(1 + fA_n) + q_1 \ln(1 - fB_1) + \dots + q_m \ln(1 - fB_m).$$

Wówczas pierwsza pochodna funkcji G wynosi:

$$G'(f) = \frac{p_1 A_1}{1 + fA_1} + \dots + \frac{p_n A_n}{1 + fA_n} - \frac{q_1 B_1}{1 - fB_1} - \dots - \frac{q_m B_m}{1 - fB_m}. \quad (9)$$

Ze względu na to, że f należy do przedziału $(0,1)$, mianownik żadnego ułamka nie przyjmuje wartości równej zero (ponieważ $B_j = \frac{b_j}{b} = \frac{b_j}{\max\{b_1, b_2, \dots, b_m\}} \leq 1$, a $0 < f < 1$).

W celu wyznaczenia punktów, w których funkcja G może osiągać maksimum, należy przyrównać prawą stronę równania (9) do zera:

$$\frac{p_1 A_1}{1 + fA_1} + \dots + \frac{p_n A_n}{1 + fA_n} - \frac{q_1 B_1}{1 - fB_1} - \dots - \frac{q_m B_m}{1 - fB_m} = 0. \quad (10)$$

Po sprowadzeniu równania (10) do wspólnego mianownika, a następnie po pomnożeniu równania przez ten mianownik, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & p_1 A_1 (1 + fA_2) \dots (1 + fA_n) (1 - fB_1) (1 - fB_m) + \dots + \\ & p_n A_n (1 + fA_1) \dots (1 + fA_{n-1}) (1 - fB_1) (1 - fB_m) - \\ & - q_1 B_1 (1 + fA_1) \dots (1 + fA_n) (1 - fB_2) (1 - fB_m) - \dots - \\ & - q_m B_m (1 + fA_1) \dots (1 + fA_n) (1 - fB_1) (1 - fB_{m-1}) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Wiadomo, że dla wielomianów o stopniu wyższym niż cztery nie istnieją ogólne wzory na ich pierwiastki [Browkin 1968, s. 147–148]. Lewa strona równania (11) jest wielomianem stopnia $n + m - 1$. W związku z tym ogólne wzory na dzielnik f , spełniający warunek konieczny istnienia ekstremum średniej geometrycznej majątku inwestora, można podać tylko w sytuacji, gdy $n + m$ nie przekracza 5.

Własności modelu dwumianowego dotyczące minimalnego obsunięcia kapitału, krzywej zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora oraz możliwości straty w przypadku wyboru innego dzielnika niż optymalny ma również model wielomianowy. Ze względu na brak ogólnego wzoru na optymalny dzielnik w modelu wielomianowym sprawdzenie pozostałych własności modelu jest niemożliwe.

Dowody własności (5), (6), (8) i (9) wyglądają tak, jak wcześniej. Wyjątkiem jest analiza przebiegu krzywej zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora. Aby udowodnić omówioną wcześniej własność, zauważmy, że:

$$G'(0) = p_1 A_1 + \dots + p_n A_n - q_1 B_1 - \dots - q_m B_m = E(Z_1) > 0,$$

więc z ciągłości funkcji G wynika, że $G'(f) > 0$ w pewnym otoczeniu punktu zero, więc G rośnie w tym otoczeniu, zatem $G(f)$ rośnie w otoczeniu punktu zero. Dalsza część dowodu pokrywa się z dowodem dla modelu dwumianowego, przy czym można zauważyć, że:

$$G''(f) = -\frac{p_1 A_1^2}{(1 + fA_1)^2} - \dots - \frac{p_n A_n^2}{(1 + fA_n)^2} - \frac{q_1 B_1^2}{(1 - fB_1)^2} - \dots - \frac{q_m B_m^2}{(1 - fB_m)^2}.$$

a więc druga pochodna $G''(f)$ jest ujemna dla dowolnego f z przedziału $(0,1)$. Oznacza to, że dla każdej strategii inwestycyjnej o dodatniej wartości oczekiwanej wyniku z inwestycji istnieje optymalny dzielnik f^* , który maksymalizuje wartość oczekiwaną względnego przyrostu majątku inwestora. Dotyczy to również strategii, które można opisać za pomocą modelu dwumianowego, szczególnego przypadku modelu wielomianowego.

Mimo braku ogólnego wzoru na optymalny dzielnik w modelu wielomianowym w praktyce można go wyznaczyć w prosty sposób. Na ogół inwestor opisuje swoją strategię inwestycyjną za pomocą modelu lub na podstawie historycznych transakcji. W przypadku modelu wielomianowego należy dokonać symulacji dużej liczby transakcji, a następnie, przy określonej długości kroku, sprawdzić, który dzielnik od 0,01 do 0,99 daje największy wzrost majątku inwestora. Długość kroku określa, o jaką wartość należy zwiększyć lub zmniejszyć dzielnik w kolejnym kroku, aby stwierdzić, jaki wzrost majątku inwestora daje dany dzielnik. Na ogół przyjmuje się, że długość kroku wynosi 0,01.

W przypadku transakcji historycznych procedura wygląda analogicznie, przy czym dla różnych dzielników symuluje się, że inwestor dokonał wszystkich transakcji z przeszłości, a następnie bada, który dzielnik dał inwestorowi największy wzrost majątku.

Metoda zaproponowana przez Ralpa Vince'a [1990, s. 88] pozwala skrócić procedurę poszukiwania optymalnego dzielnika. Jeśli bowiem zauważymy, że w kolejnym kroku po raz pierwszy nastąpił spadek wzrostu majątku inwestora, to znaczy to, że poprzedni dzielnik był optymalny. Przedstawiona wcześniej własność (8), która opisuje kształt zlogarytmowanej średniej geometrycznej majątku inwestora, daje matematyczne potwierdzenie poprawności tego podejścia.

Przedstawienie średniego względnego stanu majątku po pojedynczej transakcji inwestora jako zależnej od dzielnika f funkcji H pozwala wyznaczyć f^* w jeszcze jeden sposób. Polega on na wyznaczeniu funkcji G , jej pochodnej G' oraz znalezieniu dzielnika f z przedziału $(0,1)$, dla którego G' osiąga wartość 0.

Przykład

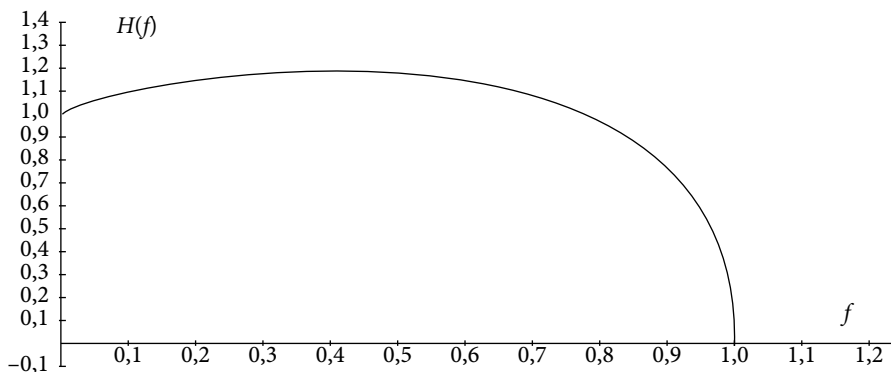
Inwestor opracował strategię inwestycyjną na rynek srebra. Dla pojedynczego kontraktu pozwala ona osiągać zyski równe $a_1 = 6$, $a_2 = 2$ lub stratę w wysokości $b_1 = 2$. Inwestor korzysta z oferowanej przez jego brokera opcji automatycznej realizacji zleceń, która daje mu pewność, że nie osiągnie żadnego innego wyniku finansowego na pojedynczej transakcji.

Inwestor postanowił zbadać użyteczność strategii, analizując jej wyniki dla tysiąca transakcji historycznych ($N = 1000$). Okazało się, że kwotę a_1 zyskał 400 razy ($\mu_1 = 400$), kwotę a_2 zyskał 200 razy ($\mu_2 = 200$), kwotę stracił 400 razy ($w_1 = 400$). Zgodnie z prawem wielkich liczb można zatem przyjąć, że prawdopodobieństwa p_1, p_2 uzyskania odpowiednio kwot a_1 i a_2 oraz prawdopodobieństwo q_1 straty kwoty w_1 są dobrze przybliżane liczbami $p_1 = \frac{400}{1000} = 0,4$, $p_2 = \frac{200}{1000} = 0,2$, $q_1 = \frac{400}{1000} = 0,4$. Wartość oczekiwana strategii inwestycyjnej wyniku dla pojedynczej transakcji wynosi zatem $0,4 \cdot 6 + 0,2 \cdot 2 - 0,4 \cdot 2 = 2$, a zatem jest dodatnia. W związku z tym posługiwanie się tą strategią ma sens.

Inwestor może osiągnąć tylko stratę równą 2, a zatem największa możliwa strata do osiągnięcia wynosi $b = 2$. Ilorazy możliwych do osiągnięcia wyników finansowych dla zysków 6 i 2 wynoszą odpowiednio $A_1 = \frac{6}{2} = 3$ i $A_2 = \frac{2}{2} = 1$, a dla straty 2 wynosi $B_1 = \frac{2}{2} = 1$. Funkcja H przyjmuje wówczas postać:

$$H(f) = (1 + 3 \cdot f)^{0,4} (1 + 1 \cdot f)^{0,2} (1 - 1 \cdot f)^{0,4},$$

co przedstawia rysunek 2.

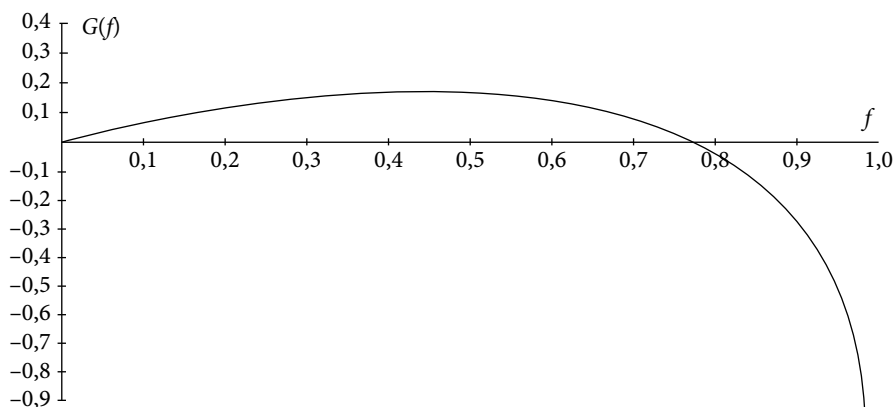


Rysunek 2. Wykres funkcji H , czyli średniego względnego stanu majątku po pojedynczej transakcji inwestora dla badanej strategii inwestycyjnej, w zależności od wybranego dzielnika f

Pomocnicza funkcja G przyjmuje postać:

$$G(f) = 0,4 \cdot \ln(1 + 3 \cdot f) + 0,2 \cdot \ln(1 + f) + 0,2 \cdot \ln(1 - f),$$

co przedstawia rysunek 3.



Rysunek 3. Wykres pomocniczej funkcji G dla badanej strategii inwestycyjnej

Wykresy funkcji H i G informują inwestora, jaki wpływ na jego majątek miałyby wybranie dzielnika f należącego do lewostronnego otoczenia f^* . Jest to istotna informacja dla inwestora zainteresowanego rezygnacją z części zysków na rzecz zmniejszenia ryzyka jego majątku. Wykresy obu funkcji zawierają informację na temat kosztów takiej zamiany.

W przypadku badanej strategii funkcje w miarę łagodnie maleją w lewostronnym otoczeniu f^* , a zatem posługiwanie się mniejszym dzielnikiem, co zgodnie z własnością (5) zmniejsza ryzyko portfela inwestora, do pewnego momentu wiąże się z niewielkim spadkiem średniego zysku na pojedynczą transakcję.

Pochodna funkcji G ma następującą postać:

$$G'(f) = \frac{1,2}{1+3f} + \frac{0,2}{1+f} - \frac{0,2}{1-f}.$$

Po przyrównaniu prawej strony równania do zera i po prostych przekształceniach otrzymujemy równanie:

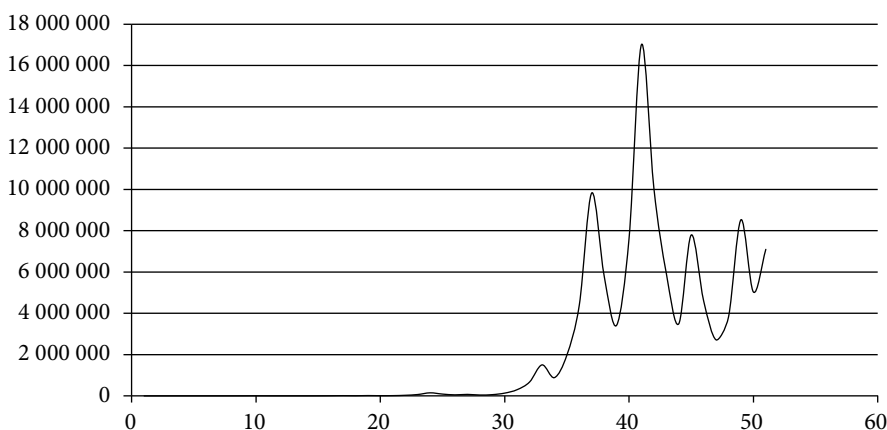
$$1,2(1+f)(1-f) + 0,2(1+3f)(1-f) - 0,2(1+3f)(1+f) = 0.$$

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń równanie przyjmuje postać:

$$3f^2 + 1,2f - 1 = 0.$$

Rozwiązaniem równanie jest $f = -0,81$ i $f = 0,41$. Ponieważ wiemy, że optymalny dzielnik należy do przedziału $(0,1)$, więc $f^* = 0,41$.

W programie Excel została wykonana symulacja posługiwania się strategią inwestycyjną z optymalnym dzielnikiem $f^* = 0,41$ przy kapitale początkowym wynoszącym 100 dolarów na podstawie 50 transakcji. Wyniki przedstawia rysunek 4.



Rysunek 4. Majątek inwestora posługującego się optymalnym dzielnikiem po określonej transakcji

Widać, że po około 30 transakcjach majątek inwestora bardzo mocno wzrósł, w pewnym momencie osiągnął wielkość kilkunastu milionów dolarów, ale później występowały również bardzo duże spadki jego wartości. Majątek poza początkowymi transakcjami nie spadł poniżej 2 milionów dolarów.

Zakończenie

Zapisanie średniej geometrycznej majątku inwestora jako funkcji zależnej od dzielnika f niesie trzy korzyści. Po pierwsze, pozwala w alternatywny sposób wyznaczyć optymalny dzielnik f^* jako rozwiązanie równania z przedziału $(0,1)$. Po drugie, informuje o kosztach posługiwania się dzielnikiem mniejszym od optymalnego w celu zmniejszenia ryzyka majątku inwestora. Ostatnia korzyść, po trzecie, wiąże się z metodą wyznaczania optymalnego dzielnika, którą zaproponował Vince. Opiera się ona na założeniu, że dla dzielników mniejszych/mniejszych od f^* wzrost/spadek dzielnika powoduje wzrost/spadek majątku inwestora. W swojej książce Vince nie przedstawia jednak dowodu na to, że to założenie jest spełnione. Przedstawiona w artykule własność (8) potwierdza prawdziwość tego założenia.

Bibliografia

- Anderson, J.A., Faff, R.W., 2004, *Maximizing Futures Returns Using Fixed Fraction Allocation*, Applied Financial Economics, no. 14(15), s. 1067–1073.
- Breiman, L., 1961, *Optimal Gambling Systems for Favorable Games*, Fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics, no. 1, s. 63–78.
- Browkin, J., 1968, *Wybrane zagadnienia algebry*, PWN, Warszawa.
- Brown, C.K., Reilly, F.K., 2001, *Analiza inwestycji i zarządzanie portfelem*, t. 1, tłum. A. Nowak, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Browne, S., 2000, *Can You do Better Than Kelly in the Short Run*, Finding the Edge: Mathematical and Quantitative Analysis of Gambling. Reno: University of Nevada, Reno Bureau of Business, Chapter 12, s. 215–231.
- Hakansson, N.H., Miller, B.L., 1975, *Compound – Return Mean – Variance Efficient Portfolios Never Risk Ruin*, Management Science, no. 22, s. 391–400.
- Kelly, J.L., 1956, *A New Interpretation of Information Rate*, Bell System Tech. J., vol. 35, s. 917–926.
- Leibfarth, L., 2006, *Measuring risk*, Technical Analysis of Stocks & Commodities, no. 24(12), s. 20–26.
- Thorpe, E.O., 1969, *Optimal Gambling System for Favorable Games*, Review of International Statistical Institute, vol. 37, no. 3, s. 273–293.

-
- Thorpe, E.O., 2007, *The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Beating and the Stock Market*, Edward O. Thorpe & Associates, Newport Beach.
- Vince, R., 1990, *Portfolio Managment Formulas: Mathematical Trading Methods for the Futures, Options, and Stock Markets*, John Willey & Sons, New York.
- Ziemba, B., 2005, *Good and Bad Properties of the Kelly Criterion*, Wilmott Magazine, s. 6–9.