STUDIA OECONOMICA POSNANIENSIA 2013, vol. 1, no. 10 (259)

Michał Konopczyński
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej,
michal.konopczynski@ue.poznan.pl

SUBOPTYMALNA RÓWNOWAGA RYNKOWA W MAŁEJ GOSPODARCE OTWARTEJ W WARUNKACH DOSKONAŁEJ MOBILNOŚCI KAPITAŁU

Streszczenie: Przedstawiamy model wzrostu AK opisujący gospodarkę prywatną (bez wyróżnionego sektora publicznego) w warunkach doskonałej mobilności kapitału. Badamy własności gospodarki zdecentralizowanej (wolnorynkowej), w której wszystkie podmioty (konsumenci, producenci) działają wyłącznie w swoim indywidualnym interesie – podejmują takie decyzje, aby maksymalizować własny dobrobyt. Rozwiązujemy w tym celu odpowiednie zadanie sterowania optymalnego, a następnie wyznaczamy równowagę rynkową. Ze względu na pozytywne efekty zewnętrzne akumulacji kapitału, których pojedyncze podmioty nie uwzględniają, równowaga w gospodarce zdecentralizowanej jest suboptymalna. Dowodzimy tego, rozwiązując analogiczne zadanie optymalizacyjne uwzględniające całą wiedzę o gospodarce – w tym efekty zewnętrzne (zadanie tzw. centralnego planisty) – i porównując poziom dobrobytu w obu sytuacjach.

Słowa kluczowe: model AK, wzrost gospodarczy, doskonała mobilność kapitału, efekty zewnętrzne, równowaga suboptymalna.

Klasyfikacja JEL: D62, D9, F43, O4.

SUBOPTIMAL MARKET EQUILIBRIUM IN A SMALL OPEN ECONOMY IN CONDITIONS OF PERFECT CAPITAL MOBILITY

Abstract: We present the AK open-economy growth model describing a private sector economy (without an explicit public sector) in conditions of perfect capital mobility where agents may invest abroad or borrow any amount of capital at a fixed interest rate. We investigate the properties of a decentralized (free market) economy, where all the stakeholders (consumers and producers) pursue their individual interests; they take decisions to maximize their own benefits. For this purpose the optimal control is established, and then the market equilibrium determined. Due to the positive external effects of capital accumulation, which does not take into account the individual actors, a decentralized, free-market equilibrium is suboptimal. This proposition is mathematically proved by solving the analogous optimization problem which incorporates all the knowledge about an economy, including externalities (the so-called 'central planner' approach), and comparing the level of prosperity in both situations.

Keywords: AK model, economic growth, perfect capital mobility, external effects, suboptimal equilibrium.

Wstęp

Teoria endogenicznego wzrostu gospodarczego, zainicjowana artykułem Romera [1986], rozwinęła się w jeden z obszerniejszych nurtów teorii ekonomii. W jej ramach są konstruowane różnorodne teoretyczne modele równowagi i wzrostu, których wspólną cechą są fundamenty mikroekonomiczne (*microfoundations*). Gospodarka jest w nich zbiorem optymalnie postępujących podmiotów – na ogół producentów maksymalizujących zyski oraz konsumentów, którzy dążą do osiągnięcia maksymalnej użyteczności. Przy odpowiednich założeniach dotyczących technologii oraz preferencji konsumentów w modelach tych istnieje równowaga rynkowa, charakteryzująca się pewną stopą wzrostu. Następnie bada się zależność owego tempa od przyjętych założeń na przykład od parametrów modelu.

Bardzo obszerny i – naszym zdaniem – reprezentatywny przegląd współczesnej teorii endogenicznego wzrostu przedstawia Acemoglu [2008] w liczącej aż 1200 stron monografii. Symptomatyczne jest, że aż 20 z 24 rozdziałów dotyczy w całości gospodarki zamkniętej, a w zaledwie 4 rozdziałach są poruszane jakiekolwiek zagadnienia związane z otwartością gospodarki. Jest to typowe dla teorii wzrostu – zdecydowana większość prac teoretycznych ogranicza się do gospodarki zamkniętej, a więc całkowicie pomijane są takie zagadnienia, jak zadłużenie zagraniczne, międzynarodowe transfery kapitału, inwestycje zagraniczne, handel międzynarodowy, (nie)równowaga bilansu płatniczego itp. W XXI wieku, szczególnie z punktu widzenia zjednoczonej Europy, takie podejście jest nie do przyjęcia, co zauważa coraz liczniejsza grupa badaczy. Wśród nich wyróżnia się Turnovsky, który wiele publikacji poświęcił gospodarce otwartej. W niedawno wydanej monografii Turnovsky [2009] przedstawia kilka wersji modelu małej gospodarki otwartej, z konsumentami maksymalizującymi użyteczność strumienia konsumpcji w sposób „Ramseyowski", przy czym zarówno sektor publiczny, jak i prywatny mogą się zadłużać i inwestować za granicą. Modele wzrostu gospodarki otwartej są przedstawiane również w wielu innych publikacjach, z najwcześniejszych warto wymienić prace Nielsena i Sorensena [1991], Rebelo [1992], Razina i Yuena [1994], a z późniejszych Heijdra i Rompa [2009] oraz Fishera [2010].

W tej pracy przedstawiamy model prywatnej gospodarki otwartej (bez wyróżnionego sektora publicznego) będący pewną modyfikacją jednego z modeli Turnovsky'ego [2009]. Preferencje konsumentów definiujemy w nieco odmienny sposób, który przybliża model, w gruncie rzeczy Ramseyowski, do modeli tzw. nakładających się pokoleń. Przyjmujemy też nieco odmienny opis technologii – zagregowaną funkcję produkcji typu AK. Modyfikacje te wpływają na wnioski jakościowe i ilościowe z modelu.

1. Podstawowe założenia

Liczba ludności kraju rośnie wykładniczo, ze stałą (egzogeniczną) stopą wzrostu n:

$$L = L_0 e^{nt}, \tag{1}$$

Realną produkcję *per capita* opisuje funkcja produkcji Cobba-Douglasa z tzw. zerowymi korzyściami skali:

$$y = ak^{\alpha}(e\bar{l})^{\beta}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0, \quad a > 0, \tag{2}$$

gdzie k oznacza zasób kapitału na osobę, a $\bar{l} \in [0,1]$ jest wskaźnikiem podaży pracy. Współczynnik $e > 0$ odzwierciedla indywidualną (przeciętną) wydajność pracy. Zakładamy, że jest ona proporcjonalna do ilości kapitału *per capita*:

$$e = x\frac{K}{L} = xk, \quad x = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Mimo zaskakującej prostoty, założenie to ma solidne uzasadnienie w pracach empirycznych (zob. [Barro i Sala-i-Martin 1995]). Mnożąc (2) obustronnie przez L, dostajemy realną produkcję całej gospodarki:

$$Y = Ly = a(Lk)^{\alpha}(e\bar{l}L)^{\beta} = aK^{\alpha}(e\bar{l}L)^{\beta}, \tag{4}$$

gdzie K oraz L oznaczają zagregowane zasoby kapitału produkcyjnego i pracy w kraju. Z matematycznego punktu widzenia funkcje produkcji (2) i (4) są identyczne, zatem gospodarkę jako całość można analizować w taki sposób, jakby to była pojedyncza „firma", której produkcja jest opisana funkcją (2). Uwzględniając (3) i (4), funkcję produkcji (2) można zapisać w postaci:

$$y = ak^{\alpha}(e\overline{l})^{\beta} = ak^{\alpha}(xk\overline{l})^{\beta} = Ak, \qquad (5)$$

gdzie $A = a(x\overline{l})^{\beta} = \text{const} > 0$.

Popyt na kapitał i pracę wynika z racjonalnych decyzji podejmowanych przez firmy starające się maksymalizować zyski. Zakładamy, że na rynkach czynników produkcji panuje konkurencja doskonała, a zatem pojedyncza firma traktuje ceny jako wielkości „narzucone" przez rynek. Niech w_K oznacza realną cenę wynajmu jednostki kapitału, a w realną stawkę płacy. W takim razie każda firma (oraz cała gospodarka) zatrudnia pracowników i wynajmuje kapitał w taki sposób, że stawki płac są równe krańcowym produktywnościom tych czynników, czyli:

$$MPK = \frac{\partial y}{\partial k} = \alpha a k^{\alpha-1}(e\overline{l})^{\beta} = \frac{\alpha y}{k} = \alpha A = w_K, \qquad (6)$$

$$MPL = \frac{\partial y}{\partial l} = \beta a k^{\alpha}(e\overline{l})^{\beta-1} = \frac{\beta y}{\overline{l}} = w. \qquad (7)$$

Ludność czerpie „zadowolenie z życia" z dwóch źródeł: konsumpcji oraz czasu wolnego (czasu niepoświęconego na pracę), który utożsamiamy z liczbą $1-\overline{l}$. Poziom szczęścia reprezentatywnego gospodarstwa domowego w danym momencie opisuje tzw. funkcja chwilowej użyteczności (*instantaneous utility function*):

$$u(t) = \frac{1}{\gamma}\left(c_t(1-\overline{l})^{\theta}\right)^{\gamma}, \quad \gamma < 0, \quad \theta > 0, \qquad (8)$$

gdzie c_t oznacza konsumpcję *per capita*, a θ wyraża elastyczność substytucji czasu wolnego przez konsumpcję. Ułamek $\gamma/(1-\gamma)$ jest równy międzyokresowej elastyczności substytucji. Przyjęte założenia gwarantują wklęsłość funkcji $u(t)$ względem c_t i $1-\overline{l}$.

Poziom szczęścia wynikającego z obecnej i przyszłej konsumpcji oraz czasu wolnego opisuje następujący funkcjonał (tzw. międzyokresowa funkcja użyteczności):

$$U = \int_0^{\infty} u(t)e^{-(\rho-n)t}dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma}\left(c_t(1-\overline{l})^{\theta}\right)^{\gamma} e^{-(\rho-n)t}dt, \quad \rho > n; \qquad (9)$$

$\rho > 0$ oznacza subiektywną stopę dyskonta (przyszłej konsumpcji). Wyjaśnienia wymaga nietypowa, rzadko spotykana w literaturze, stopa *efektywnego* dyskonta równa $\rho - n$, którą przyjęliśmy wzorem Acemoglu [2008, s. 310]. Gospodarstwa domowe czerpią użyteczność zarówno z własnej konsumpcji i czasu wolnego, jak i z konsumpcji i czasu wolnego swoich przyszłych członków (dzieci, wnuków itd.), których liczba rośnie ze stopą n. Zatem im wyższą stopą wzrostu populacji n charakteryzuje się dany kraj, tym mniejsza jest efektywna stopa dyskonta, bo liczebność dzieci, wnuków itd., które będą konsumowały, jest większa. Mówiąc nieco bardziej intuicyjnie – im więcej dzieci, tym bardziej cenimy sobie przyszłą konsumpcję. Założenie to przybliża nieco Ramseyowską teorię wzrostu do teorii opartej na modelu tzw. nakładających się pokoleń.

Zakładamy, że $\rho > n$. W przeciwnym razie całka występująca w (9) nie byłaby zbieżna i niemożliwe byłoby rozwiązanie jakiegokolwiek zadania maksymalizacji U.

Proces akumulacji kapitału (*per capita*) jest opisany w standardowy sposób:

$$\dot{k} = i - (n + \delta)k, \tag{10}$$

gdzie $\delta > 0$ oznacza tempo deprecjacji kapitału. Inwestycje obarczone są tzw. kosztami dostosowania (*adjustment cost*) [Hayashi 1982]. Aby (w ujęciu *per capita*) zrealizować inwestycje netto równe i, trzeba ponieść odpowiednio większe nakłady równe

$$\phi(i,k) = i\left(1 + \frac{\chi}{2} \cdot \frac{i}{k}\right), \quad \chi > 0. \tag{11}$$

Zakładamy doskonałą mobilność kapitału, co oznacza, że sektor prywatny ma możliwość pożyczania oraz lokowania dowolnych kwot za granicą na stałą (a przynajmniej egzogenicznie daną) stopę procentową r. Sektor prywatny czerpie dochody w formie wynagrodzenia pracy i kapitału oraz odsetek od posiadanych aktywów zagranicznych B (umownie zwanych obligacjami):

$$Y_d = w\bar{l}L + w_K K + rB, \tag{12}$$

czyli w przeliczeniu na osobę

$$y_d = w\bar{l} + w_K k + rb. \tag{13}$$

Dochody te służą konsumpcji i inwestycjom, a ewentualna nadwyżka jest lokowana w obligacjach zagranicznych. Naturalnie nadwyżka ta również może być ujemna, co oznacza konieczność redukcji salda obligacji zagranicznych (lub nawet zadłużenia się). Równanie budżetowe ma więc postać:

$$\dot{B} = w\overline{l}L + w_K K - C - \Phi(I, K) + rB, \tag{14}$$

czyli w ujęciu *per capita*:

$$\dot{b} = w\overline{l} + w_K k - c - i\left(1 + \frac{\chi}{2} \cdot \frac{i}{k}\right) + (r-n)b. \tag{15}$$

Ze względu na (6) i (7) dochody z pracy i kapitału są łącznie równe produkcji. Zatem (15) można zapisać w postaci:

$$\dot{b} = y - c - i\left(1 + \frac{\chi}{2} \cdot \frac{i}{k}\right) + (r-n)b. \tag{16}$$

Warto podkreślić, że równanie budżetowe (16) w pełni uświadamia sobie centralny planista, ale nie przeciętny Kowalski. Dlatego podejmując decyzje, które za chwilę opiszemy za pomocą zadań sterowania optymalnego, Kowalski posługuje się formułą (15), traktując przy tym stawki płac w i w_K jako wielkości dane (egzogeniczne). Natomiast centralny planista wie o gospodarce wszystko, dlatego posługuje się równaniem budżetowym (16).

2. Gospodarka zdecentralizowana (Kowalscy)

Sektor prywatny ustala wielkość konsumpcji i inwestycji tak, aby osiągnąć jak najwyższy poziom użyteczności opisanej przez U. Ów problem decyzyjny wygodnie zapisać za pomocą zadania sterowania optymalnego:

$$\begin{cases} \max \int\limits_0^\infty \frac{1}{\gamma}\left(c_t(1-\overline{l})^\theta\right)^\gamma e^{-(\rho-n)t}dt, \\ \dot{b} = w\overline{l} + w_K k - c - i\left(1 + \frac{\chi}{2} \cdot \frac{i}{k}\right) + (r-n)b, \\ \dot{k} = i - (n+\delta)k. \end{cases} \tag{17}$$

Zmienne sterujące: c_t, i_t. Zmienne stanu: b_t, k_t (i pośrednio y_t). Wielkości traktowane jako egzogeniczne: w, w_K. Dane są początkowe wartości zmiennych stanu: $b(t=0) = b_0$, $k(t=0) = k_0 > 0$. Zapiszmy hamiltonian wartości bieżącej:

$$H_c = \frac{1}{\gamma}\left(c(1-\overline{l}\,)^{\theta}\right)^{\gamma} +$$

$$+\lambda_1 \cdot \left[w\overline{l} + w_K k - c - i\left(1 + \frac{\chi}{2}\cdot\frac{i}{k}\right) + (r-n)b \right] + \lambda_2 \cdot \left[i - (n+\delta)k \right]. \quad (18)$$

Jak widać, zmienna λ_1 jest ceną dualną bogactwa ulokowanego w obligacje zagraniczne b. Analogicznie, λ_2 jest ceną dualną kapitału k. Dla wygody będziemy używać również ilorazu tych cen: $q = \lambda_2/\lambda_1$, który można interpretować jako rynkową cenę kapitału w stosunku do rynkowej ceny obligacji zagranicznych.

Rozwiązanie optymalne zadania (17) musi spełniać następujące warunki:

$$\forall t \quad \frac{\partial H_c}{\partial c} = 0. \quad (19a)$$

$$\forall t \quad \frac{\partial H_c}{\partial i} = 0. \quad (19b)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_c}{\partial b} + \lambda_1(\rho - n). \quad (19c)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_c}{\partial k} + \lambda_2(\rho - n). \quad (19d)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\lambda_1(t)\, b\,(t) = 0. \quad (19e)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\lambda_2(t)\, k(t) = 0. \quad (19f)$$

Warunek (19a) ma postać:

$$\lambda_1 = (1-\overline{l}\,)^{\theta\gamma} c^{\gamma-1}, \quad (20)$$

co oznacza, że cena dualna bogactwa (w formie obligacji) musi być dla każdego t równa marginalnej użyteczności konsumpcji. Różniczkując to równanie względem t, po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = (\gamma - 1)\frac{\dot{c}}{c}. \quad (21)$$

Natomiast (19c) można zapisać w postaci:

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = \rho - r. \tag{22}$$

Podstawiając (22) do (21), wyznaczamy stopę wzrostu konsumpcji, którą dla wygody będziemy oznaczać symbolem ψ:

$$\psi = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{1-\gamma}. \tag{23}$$

Zauważmy, że rozwiązanie optymalne charakteryzuje się stałą stopą wzrostu konsumpcji, która zależy wyłącznie od parametrów opisujących preferencje konsumentów oraz od stopy procentowej r. Dokładniej mówiąc, stopa wzrostu konsumpcji jest proporcjonalna do różnicy między stopą oprocentowania obligacji zagranicznych oraz stopą dyskonta ρ. Optymalna trajektoria konsumpcji ma postać:

$$c(t) = c(0) \cdot e^{\psi t}, \tag{24}$$

czyli konsumpcja całkowita w kraju kształtuje się zgodnie z równaniem

$$C(t) = C(0) \cdot e^{(\psi + n)t}. \tag{25}$$

Warunek (19b) można zapisać w postaci

$$q = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \chi \frac{i}{k}. \tag{26}$$

Dzieląc (11) obustronnie przez k i uwzględniając (26), dostajemy stopę wzrostu kapitału, którą dla wygody oznaczać będziemy symbolem ϕ:

$$\phi = \hat{k} = \frac{q-1}{\chi} - (n+\delta). \tag{27}$$

Warto podkreślić, że w odróżnieniu od tempa wzrostu konsumpcji, stopa wzrostu kapitału nie jest wielkością stałą, gdyż jest powiązana z trajektorią $q(t)$. Zatem trajektorię kapitału można zapisać jedynie w bardzo ogólnej (całkowej) postaci:

$$k(t) = k_0 e^{\int_0^t \phi(s) ds}. \tag{28}$$

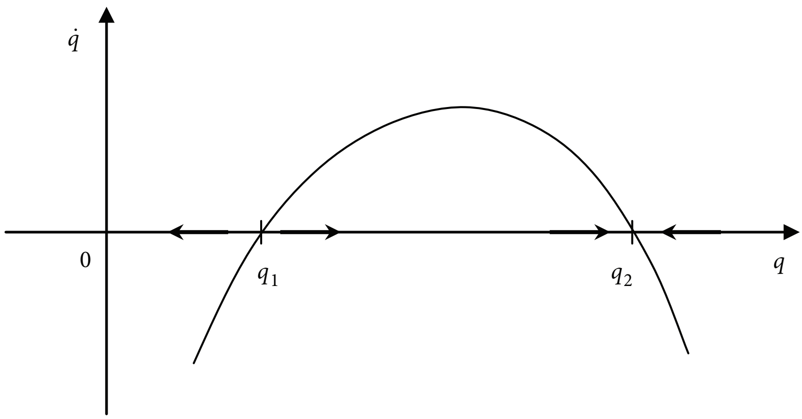
Z tego wynika, że zasób kapitału w kraju kształtuje się zgodnie z równaniem:

$$K(t) = k(t) \cdot L(t) = K_0 e^{\left(\int_0^t \phi(s)ds\right) + nt}. \tag{29}$$

Aby wyznaczyć ścieżkę $q(t)$, od której zależy trajektoria kapitału, przyjrzyjmy się ostatniemu z warunków koniecznych optymalności (19d). Uwzględniając (22) i (26), można go zapisać w postaci równania:

$$\dot{q} = (r+\delta)q - \alpha A - \frac{(q-1)^2}{2\chi}. \tag{30}$$

Jest to nieliniowe (kwadratowe) równanie różniczkowe ze stałymi współczynnikami (autonomiczne). Rysunek 1 przedstawia diagram fazowy tego równania.



Rysunek 1. Diagram fazowy równania (30)

Zauważmy, że przedstawiona na wykresie parabola musi mieć co najmniej jedno (rzeczywiste) miejsce zerowe – w przeciwnym razie mielibyśmy $\forall q \ \dot{q} < 0$, a więc $q(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty$, co ze względu na sens ekonomiczny zmiennej q jest niedopuszczalne. Zatem równanie

$$(r+\delta)q - \alpha A - \frac{(q-1)^2}{2\chi} = 0 \tag{31}$$

musi mieć przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha A \leq (r+\delta)\left[1+\frac{\chi}{2}(r+\delta)\right]. \tag{32}$$

Pierwiastki równania $\dot{q}=0$, są dane wzorami:

$$q_1 = 1+\chi(r+\delta)-\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2}, \tag{33}$$

$$q_2 = 1+\chi(r+\delta)+\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2}. \tag{34}$$

Łatwo zauważyć, że:
(a) Jeżeli $r + \delta = \alpha A$, to $q_1 = 1$, a $q_2 = 1 + 2\chi(r + \delta)$.
(b) Jeżeli $r + \delta > \alpha A$, to $0 < q_1 < 1 < q_2$.
(c) Jeżeli $r + \delta < \alpha A$, to $1 < q_1 < q_2$.

Generalnie, w każdym przypadku $q_2 > q_1 > 0$ oraz $q_2 > 1$. Oba punkty stanowią stany stacjonarne, z tym że w punkcie q_1 stan ten jest niestabilny, a w punkcie q_2 jest lokalnie stabilny. W Aneksie pokazujemy, że warunek transwersalności (19f) jest spełniony jedynie w punkcie q_1. Możemy zatem sformułować:

Wniosek 1
Jedynym rozwiązaniem równania (30) spełniającym warunek transwersalności (19f) jest q_1. Zatem rynkowa cena kapitału musi w każdej chwili t znajdować się w niestabilnym punkcie q_1. W reakcji na jakikolwiek szok (zmianę wartości egzogenicznych powodującą zmianę wartości q_1) rynkowa cena kapitału musi natychmiast skokowo się dostosować – proces dochodzenia do nowego stanu równowagi jest natychmiastowy. Zatem

$$\forall t \;\; q = q_1. \tag{35}$$

W konsekwencji kapitał *per capita* rośnie w tempie

$$\phi = \frac{q_1 - 1}{\chi} - (n+\delta). \tag{36}$$

Dla danego zestawu parametrów i wielkości egzogenicznych, ϕ = const. Trajektorię kapitału (28) można zatem zapisać prościej:

$$k(t) = k_0 e^{\phi t}. \tag{37}$$

Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze drugiemu warunkowi transwersalności (19e), który (jak łatwo się domyślić) determinuje początkową wielkość konsumpcji. Najpierw należy wyznaczyć trajektorię $b(t)$, rozwiązując równanie (16). Korzystając z (24), (26) i (37) można je zapisać w postaci:

$$\dot{b} = vk_0 e^{\phi t} - c(0)\cdot e^{\psi t} + (r-n)b, \tag{38}$$

gdzie

$$v = A - \frac{q_1^2 - 1}{2\chi}. \tag{39}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$b(t) = Se^{(r-n)t} - \frac{vk_0}{r-n-\phi}\cdot e^{\phi t} + \frac{c(0)}{r-n-\psi}\cdot e^{\psi t}. \tag{40}$$

Znając początkowy zasób obligacji $b(t=0) = b_0$, możemy wyznaczyć stałą S:

$$S = b_0 + \frac{vk_0}{r-n-\phi} - \frac{c(0)}{r-n-\psi}. \tag{41}$$

Wyznaczywszy trajektorię $b(t)$, możemy już przyjrzeć się dokładniej warunkowi transwersalności (19e). Z (22) wynika, że

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0)e^{(\rho-r)t}. \tag{42}$$

Uwzględniając ten fakt oraz (40) wraz z (41), warunek (19e) można zapisać w postaci:

$$\lambda_1(0)\cdot \lim_{t\to\infty}\left\{ S - \frac{vk_0}{r-n-\phi}\cdot e^{(n-r+\phi)t} + \frac{c(0)}{r-n-\psi}\cdot e^{(n-r+\psi)t} \right\} = 0, \tag{43}$$

co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są trzy warunki:

$$S = b_0 + \frac{vk_0}{r-n-\phi} - \frac{c(0)}{r-n-\psi} = 0, \tag{44a}$$

$$r - n - \phi > 0, \tag{44b}$$

$$r - n - \psi > 0. \tag{44c}$$

Równość (44a) determinuje początkową wielkość konsumpcji:

$$c(0)=\left(b_0+\frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\right)(r-n-\psi). \tag{45}$$

Uwzględniając (33) i (36), można łatwo wykazać, że warunek (44b) jest spełniony. Natomiast (44c) można przekształcić do równoważnej postaci:

$$\rho > \gamma(r-n)+n, \tag{46}$$

co oznacza, że aby otrzymane rozwiązanie było optymalne (spełniało warunki transwersalności) stopa dyskonta musi być po prostu dostatecznie wysoka. W szczególnym przypadku, gdy $n = 0$, warunek ten redukuje się do postaci: $\rho > \gamma r$.

Korzystając z wyznaczonej początkowej wielkości konsumpcji (45), trajektorię $b(t)$ można ostatecznie zapisać w postaci:

$$b(t)=\left(b_0+\frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\right)\cdot e^{\psi t}-\frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\cdot e^{\phi t}. \tag{47}$$

Z oczywistych względów konsumpcja w całym horyzoncie musi być dodatnia. Ponieważ stopa wzrostu konsumpcji jest przy przyjętych założeniach dodatnia, więc warunek ten jest spełniony, jeżeli konsumpcja początkowa jest dodatnia. Zatem zachodzić musi warunek:

$$b_0<\frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}, \tag{48}$$

co oznacza, że gospodarka nie może być nadmiernie zadłużona na początku horyzontu planowania.

Równowaga w gospodarce zdecentralizowanej

$$k(t)=k_0e^{\phi t}, \qquad \phi=\frac{q-1}{\chi}-(n+\delta),$$

$$i(t)=\frac{q-1}{\chi}\cdot k(t), \qquad q=1+\chi(r+\delta)-\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2},$$

$$y(t) = Ak(t), \qquad A = a(x\overline{l})^{\beta} = \text{const} > 0,$$

$$c(t) = c_0 \cdot e^{\psi t}, \qquad c_0 = \left(b_0 + \frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\right)(r-n-\psi),$$

$$b(t) = \left(b_0 + \frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\right) \cdot e^{\psi t} - \frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi} \cdot e^{\phi t}, \qquad \psi = \frac{r-\rho}{1-\gamma}, \quad \upsilon = A - \frac{q^2-1}{2\chi} > 0.$$

Stan początkowy: k_0, b_0.
Zmienne decyzyjne (sterowania): $c(t)$, $i(t)$.
Zmienne stanu: $k(t)$, $y(t)$, $b(t)$.

W standardowych modelach gospodarki zamkniętej produkcja tożsama z dochodem narodowym musi zawsze rosnąć w identycznym tempie jak konsumpcja. Tutaj natomiast niekoniecznie. Są trzy możliwości. Do ich opisu przyda się stopa wzrostu salda obligacji zagranicznych, którą łatwo wyznaczyć z (47):

$$\hat{b}(t) = \frac{b_0\psi + \frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\left(\psi - \phi \cdot e^{(\phi-\psi)t}\right)}{b_0 + \frac{\upsilon k_0}{r-n-\phi}\left(1 - e^{(\phi-\psi)t}\right)}. \tag{49}$$

Zatem stopa wzrostu $b(t)$ nie musi być stała w czasie. Wykorzystując regułę de l'Hospitala, łatwo wykazać, że:
- jeżeli $\psi = \phi$, to $\hat{b}(t) = \psi$,
- jeżeli $\psi > \phi$, to $\hat{b}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \psi$,
- jeżeli $\psi < \phi$, to $\hat{b}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \phi$.

W modelu mamy zatem trzy możliwości:
1. Jeśli $\psi = \phi$, to konsumpcja i produkcja (dochód narodowy) rosną w identycznym tempie. Również zasób obligacji zagranicznych rośnie z tą samą stopą $\psi = \phi$.
2. Jeśli $\psi > \phi$, to konsumpcja rośnie szybciej niż zasób kapitału i produkcja. Utrzymanie wysokiego tempa wzrostu konsumpcji jest możliwe dzięki dochodom z obligacji zagranicznych, których saldo musi (w granicy) rosnąć w tempie równym stopie wzrostu konsumpcji. Oczywiście biorąc pod uwagę relatywnie niskie tempo akumulacji kapitału, zbilansowanie strumienia dochodów ze strumieniem wydatków wymaga relatywnie niskiej konsumpcji w początkowej fazie ($c(0)$ musi być stosunkowo niska). I rzeczywiście łatwo wykazać, że

$$\psi > \phi \Leftrightarrow \rho < \gamma r - (1-\gamma)\delta + \frac{1-\gamma}{\chi}\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2}. \quad (50)$$

Zatem ten przypadek występuje wtedy, gdy konsumenci są wystarczająco cierpliwi (współczynnik dyskonta jest dostatecznie niski). Konsumenci akceptują wówczas niską konsumpcję w początkowej fazie, rok po roku nadwyżki dochodu nad wydatkami inwestują w obligacje zagraniczne, i dzięki temu mogą sobie pozwolić na tempo wzrostu konsumpcji wyższe niż tempo wzrostu gospodarczego. W granicy (dla $t \to \infty$) dochód z produkcji krajowej traci właściwie znaczenie – konsumpcja jest finansowana z odsetek od obligacji zagranicznych, których zasób rośnie w nieskończoność.

3. Jeśli $\psi < \phi$, to konsumpcja rośnie wolniej niż zasób kapitału i produkcja. Wówczas (w granicy) saldo obligacji zagranicznych rośnie w tempie odpowiadającym stopie wzrostu produkcji. Zbilansowanie strumienia dochodów ze strumieniem wydatków pozwala na relatywnie wysoką konsumpcję w początkowej fazie ($c(0)$ musi być stosunkowo wysoka). I rzeczywiście

$$\psi < \phi \Leftrightarrow \rho > \gamma r - (1-\gamma)\delta + \frac{1-\gamma}{\chi}\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2}. \quad (51)$$

Zatem ten przypadek występuje wtedy, gdy konsumenci są niecierpliwi (współczynnik dyskonta jest relatywnie wysoki). Konsumpcja jest wysoka w początkowej fazie, co wymaga ujemnych inwestycji w obligacje zagraniczne (czyli zadłużania się). Rok po roku nadwyżki wydatków konsumpcyjnych nad dochodami są pokrywane pożyczkami zagranicznymi i w rezultacie saldo obligacji $b(t) \to -\infty$, co widać wprost ze wzoru (47). Nie oznacza to jednak, że zadłużenie w stosunku do PKB rośnie w nieskończoność (byłoby to sprzeczne z warunkami transwersalności). Konsumpcja rośnie bowiem w tempie wolniejszym niż produkcja, a w granicy (dla $t \to \infty$) ujemne saldo obligacji (czyli zadłużenie) rośnie w tym samym tempie co produkcja. Zatem stosunek zadłużenia do produkcji stabilizuje się na pewnym skończonym poziomie. Korzystając z (27) i (47), otrzymujemy:

$$\frac{b(t)}{y(t)} = \frac{b_0}{y_0}e^{(\psi-\phi)t} + \frac{v}{A(r-n-\phi)}\cdot\left[e^{(\psi-\phi)t}-1\right], \quad (52)$$

skąd wynika, że:

jeżeli $\psi = \phi$, to $$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{y(t)} = \frac{b_0}{y_0}, \tag{53a}$$

jeżeli $\psi > \phi$, to $$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{y(t)} = +\infty, \tag{53b}$$

jeżeli $\psi < \phi$, to $$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{y(t)} = \frac{-v}{A(r-n-\phi)}, \tag{53c}$$

Dwa ostatnie przypadki pokazują, jak bardzo modele małej gospodarki otwartej różnią się od standardowych modeli gospodarki zamkniętej, w których możliwości konsumpcji są zdeterminowane przez akumulację kapitału i produkcję krajową, a wszystkie zmienne realne – w tym produkcja, kapitał, inwestycje, konsumpcja – muszą (przynajmniej w granicy) rosnąć w identycznym tempie. W małej gospodarce otwartej tempo wzrostu konsumpcji może być permanentnie (w nieskończoność) różne od tempa wzrostu produkcji. Naturalnie jest to rezultat założenia o możliwości inwestowania i pożyczania dowolnie dużych kwot na stały procent *r*.

Dobrobyt (gospodarka zdecentralizowana)

Uwzględniwszy wyznaczoną trajektorię konsumpcji, dobrobyt mierzony wartością funkcjonału celu (9) można zapisać w postaci:

$$\Omega = \frac{1}{\gamma}(1-\overline{l})^{\theta\gamma} c_0^{\gamma} \int_0^{\infty} e^{-(r-n-\psi)t} dt. \tag{54}$$

Ze względu na warunki transwersalności, a w szczególności (44c), całka we wzorze (54) jest zbieżna. Zatem dobrobyt w gospodarce zdecentralizowanej wyraża się wzorem:

$$\Omega = \frac{(1-\overline{l})^{\theta\gamma} c_0^{\gamma}}{\gamma(r-n-\psi)}. \tag{55}$$

Wzór ten wydaje się prosty, lecz jest to iluzja. Po podstawieniu wszystkich wyznaczonych zależności otrzymujemy pełną postać parametryczną[1]:

[1] Wzór jest w postaci parametrycznej, jeżeli występują w nim wyłącznie parametry modelu.

$$\Omega = \frac{(1-\overline{l}\,)^{\theta\gamma}}{\gamma}\left(b_0 + \frac{\left(A - \frac{q^2-1}{2\chi}\right)k_0}{r+\delta-\frac{q-1}{\chi}}\right)^{\gamma}\left(r-n-\frac{r-\rho}{1-\gamma}\right)^{\gamma-1}, \tag{56}$$

gdzie $q = 1+\chi(r+\delta)-\sqrt{2\chi(r+\delta-\alpha A)+\chi^2(r+\delta)^2}$. Zatem poziom dobrobytu w równowadze zależy od wszystkich (bez wyjątku!) parametrów gospodarki, a także od początkowych zasobów kapitału i obligacji zagranicznych.

3. Gospodarka centralnie planowana

Centralny planista różni się od Kowalskiego tym, że nie traktuje stawek płac jako wielkości „narzucane" przez rynek. On wie o tym, że czynniki produkcji są wynagradzane w taki sposób, że dochody z pracy i kapitału są łącznie równe produkcji. Dlatego w zadaniu sterowania optymalnego posługuje się ograniczeniem budżetowym (16), a nie (15). Ponadto centralny planista ma świadomość, że inwestycje w kapitał rzeczowy wywierają pozytywny wpływ na wydajność pracy (pozytywne efekty zewnętrzne), zgodnie z (4). Dlatego krańcowy produkt kapitału jest z jego punktu widzenia opisany wzorem (8) i równy *A*.

Problem decyzyjny centralnego planisty zapiszemy za pomocą zadania sterowania optymalnego:

$$\begin{cases} \max \int_0^\infty \frac{1}{\gamma}\left(c_t(1-\overline{l}\,)^{\theta}\right)^{\gamma} e^{-(\rho-n)t}dt, \\ \dot{b} = Ak - c - i\cdot\left(1+\frac{\chi}{2}\cdot\frac{i}{k}\right)+(r-n)b, \\ \dot{k} = i-(n+\delta)k. \end{cases} \tag{57}$$

Zmienne sterujące: c_t, i_t. Zmienne stanu: b_t, k_t (i pośrednio y_t). Wielkości traktowane jako egzogeniczne: *brak*. Dane są początkowe wartości zmiennych stanu: $b(t=0) = b_0$, $k(t=0) = k_0 > 0$. Zapiszmy hamiltonian wartości bieżącej:

$$H_c =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(c(1-\overline{l})^{\theta}\right)^{\gamma} + \lambda_1 \cdot \left[Ak - c - i\left(1 + \frac{\chi}{2}\cdot\frac{i}{k}\right) + (r-n)b\right] + \lambda_2 \cdot \left[i - (n+\delta)k\right]. \quad (58)$$

Rozwiązanie optymalne zadania (57) musi spełniać następujące warunki:

$$\forall t \;\; \frac{\partial H_c}{\partial c} = 0. \quad (59a)$$

$$\forall t \;\; \frac{\partial H_c}{\partial i} = 0. \quad (59b)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H_c}{\partial b} + \lambda_1(\rho - n). \quad (59c)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_c}{\partial k} + \lambda_2(\rho - n). \quad (59d)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\lambda_1(t)b(t) = 0. \quad (59e)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\lambda_2(t)k(t) = 0. \quad (59f)$$

Łatwo sprawdzić, że trzy pierwsze warunki (59a-c) prowadzą do identycznych wniosków jak w gospodarce zdecentralizowanej, dzięki czemu wzory (20)–(29) mają zastosowanie również dla gospodarki centralnie planowanej. Natomiast równanie (30) przyjmie postać:

$$\dot{q} = (r+\delta)q - A - \frac{(q-1)^2}{2\chi}, \quad (60)$$

która różni się od (30) jedynie wartością krańcowej produktywności kapitału. Analiza tego równania jest bardzo podobna do tej, którą przedstawiliśmy w odniesieniu do gospodarki zdecentralizowanej. Wszystkie wzory i wnioski pozostają w mocy, z tym że we wzorach od (30) aż do (50) αA należy zastąpić przez A. Z tego względu warunek (32) przyjmie teraz silniejszą postać:

$$A \leq (r+\delta)\left[1 + \frac{\chi}{2}(r+\delta)\right]. \quad (61)$$

Możemy zatem od razu przedstawić zwięzły opis stanu równowagi w gospodarce centralnie planowanej.

Równowaga w gospodarce centralnie planowanej (oznaczamy ją symbolem *)

$$k(t) = k_0 e^{\phi^* t}, \qquad \phi^* = \frac{q^*-1}{\chi} - (n+\delta),$$

$$i(t) = \frac{q^*-1}{\chi} \cdot k(t), \qquad q^* = 1 + \chi(r+\delta) + \\ -\sqrt{2\chi(r+\delta-A) + \chi^2 (r+\delta)^2},$$

$$y(t) = Ak(t), \qquad A = a(x\bar{l})^{\beta} = \text{const} > 0,$$

$$c(t) = c_0^* \cdot e^{\psi^* t}, \qquad c_0^* = \left(b_0 + \frac{v^* k_0}{r-n-\phi^*} \right)(r-n-\psi^*),$$

$$b(t) = \left(b_0 + \frac{v^* k_0}{r-n-\phi^*} \right) \cdot e^{\psi^* t} - \frac{v^* k_0}{r-n-\phi^*} \cdot e^{\phi^* t},$$

$$\psi^* = \frac{r-\rho}{1-\gamma}, \quad v^* = A - \frac{q^{*2}-1}{2\chi}.$$

Stan początkowy: k_0, b_0.
Zmienne decyzyjne (sterowania): $c(t)$, $i(t)$.
Zmienne stanu: $k(t)$, $y(t)$, $b(t)$.
Opisane na str. 12–13 trzy przypadki występują również w gospodarce centralnie planowanej i ich interpretacja jest identyczna.

Dobrobyt (gospodarka centralnie planowana)

Wzór (55) nie ulega żadnym zmianom, czyli dla gospodarki centralnie planowanej:

$$\Omega^* = \frac{(1-\bar{l})^{\theta\gamma} (c_0^*)^{\gamma}}{\gamma(r-n-\psi^*)}, \tag{62}$$

Po podstawieniu wyznaczonych zależności otrzymujemy pełną postać parametryczną:

$$\Omega^* = \frac{(1-\bar{l})^{\theta\gamma}}{\gamma} \left(b_0 + \frac{\left(A - \dfrac{q^{*2}-1}{2\chi} \right) k_0}{r+\delta-\dfrac{q^*-1}{\chi}} \right)^{\gamma} \left(r-n-\frac{r-\rho}{1-\gamma} \right)^{\gamma-1}, \tag{63}$$

gdzie $q^* = 1 + \chi(r+\delta) - \sqrt{2\chi(r+\delta-A) + \chi^2(r+\delta)^2}$. Poziom dobrobytu w równowadze zależy od wszystkich (bez wyjątku!) parametrów gospodarki, a także od początkowych zasobów kapitału i obligacji zagranicznych.

4. Podsumowanie – porównanie gospodarki centralnie planowanej ze zdecentralizowaną

Łatwo wykazać, że $q^* > q > 0$, z czego wynika, że $v^* < v$ oraz $\phi^* > \phi$. Zatem centralny planista akumulowałby kapitał w szybszym tempie niż gospodarka Kowalskich, dzięki czemu stopa wzrostu gospodarczego byłaby permanentnie wyższa niż w gospodarce rynkowej. Wynika to z obecności pozytywnych efektów zewnętrznych związanych z inwestowaniem w kapitał, których nie uwzględniają (nie uświadamiają sobie) poszczególne podmioty w gospodarce zdecentralizowanej. Mianowicie pojedyncza firma, decydując o inwestycjach, traktuje wydajność pracy e jako wielkość daną (na którą indywidualnie nie ma wpływu), a więc tzw. prywatny krańcowy produkt kapitału jest, zgodnie ze wzorem (6), równy αA. Tymczasem inwestowanie w kapitał podnosi wydajność pracy e, zgodnie ze wzorem (3), skąd wynika, że rzeczywisty (tzw. społeczny) krańcowy produkt kapitału jest znacznie wyższy i wynosi A. Dlatego gospodarka zdecentralizowana inwestuje „zbyt mało".

Co ciekawe, w obu gospodarkach tempo wzrostu konsumpcji jest takie samo (zależy wyłącznie od parametrów funkcji użyteczności oraz od stopy procentowej r):

$$\psi^* = \psi = \frac{r-\rho}{1-\gamma}, \tag{64}$$

lecz początkowy poziom konsumpcji nie jest taki sam. W gospodarce centralnie sterowanej jest on niższy niż w rynkowej ($c_0^* < c_0$), gdyż początkowo większa część dochodu narodowego jest przeznaczana na inwestycje w kapitał. Z drugiej strony, ze wzorów opisujących dobrobyt wynika, że $\frac{\Omega^*}{\Omega} = \left(\frac{c_0^*}{c_0}\right)^\gamma$. Wiemy, że $c_0^* < c_0$, a jednocześnie $\gamma < 0$. Zatem, jak można się było spodziewać,

$$\Omega^* > \Omega. \tag{65}$$

Uwzględnienie w zadaniu optymalizacyjnym całej wiedzy o funkcjonowaniu gospodarki pozwala osiągnąć wyższy poziom dobrobytu.

Oczywiście w rzeczywistości nie istnieje żaden podmiot, który miałby nie tylko kompletną wiedzę o funkcjonowaniu gospodarki, ale jeszcze możliwość sterowania postępowaniem wszystkich firm i konsumentów (narzucania im swej woli). W gospodarce rynkowej każdy podmiot – jak wiadomo od czasów Adama Smitha – kieruje się swym własnym, indywidualnym interesem. Niemniej jednak istnieje sposób, aby niczego nie narzucając poszczególnym podmiotom, gospodarkę zdecentralizowaną doprowadzić do takiej równowagi, *jak gdyby była ona centralnie sterowana*. Wystarczy zastosować takie narzędzia, aby decyzje podejmowane przez firmy uwzględniały pozytywne efekty zewnętrzne akumulacji kapitału. W literaturze określa się to mianem tzw. internalizacji (*internalization*) efektów zewnętrznych. Na przykład do przedstawionego modelu można wprowadzić rząd, który w odpowiedniej wysokości subsydiuje kapitał.

ANEKS

Dowód, że warunek transwersalności (19f) jest spełniony jedynie w punkcie q_1.

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\lambda_2(t)k(t)=0. \tag{19f}$$

Z (22) wynika, że

$$\lambda_2(t)=q(t)\cdot\lambda_1(0)\cdot e^{(\rho-r)t}. \tag{a.1}$$

Z (27) oraz (28) wynika, że

$$k(t)=k_0 e^{\int_0^t\left(\frac{q(s)-1}{\chi}-n-\delta\right)ds}=k_0 e^{\int_0^t\left(\frac{q(s)-1}{\chi}\right)ds}\cdot e^{-(n+\delta)t}. \tag{a.2}$$

Zatem warunek (19f) można zapisać w postaci:

$$\lambda_1(0)k_0\cdot\lim_{t\to\infty}\left\{q(t)e^{-(r+\delta)t}\cdot e^{\int_0^t\left(\frac{q(s)-1}{\chi}\right)ds}\right\}=0, \tag{a.3}$$

Punkt stały q_1 jest niestabilny, dlatego – jak zauważyliśmy we Wniosku 1 – wykluczona jest tu jakakolwiek dynamika przejścia. Jeśli gospodarka ma osiągnąć ten punkt, to musi w nim być od samego początku, czyli musi zachodzić:

$$\forall t \;\; q_1(t) = q_1 = \text{const}, \tag{a.4}$$

gdzie q_1 jest dane wzorem (33). Zatem w tym wypadku zachodzi:

$$\int_0^t \left(\frac{q(s)-1}{\chi} \right) ds = \frac{q_1 - 1}{\chi} \cdot t = \left(r + \delta - \sqrt{\frac{2(r+\delta-\alpha A)}{\chi} + (r+\delta)^2} \right) \cdot t = \\ = \left(r + \delta - \sqrt{\ldots} \right) \cdot t. \tag{a.5}$$

Z tego wynika, że warunek (a.3) jest spełniony, zachodzi bowiem

$$\lambda_1(0) k_0 \cdot \lim_{t\to\infty} \left\{ q_1 e^{-(r+\delta)t} \cdot e^{\int_0^t \left(\frac{q_1 - 1}{\chi} \right) ds} \right\} = \lambda_1(0) k_0 q_1 \cdot \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{-(r+\delta)t} \cdot e^{\left(r+\delta-\sqrt{\ldots}\right)t} \right\} = \\ = \lambda_1(0) k_0 q_1 \cdot \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{\left(-\sqrt{\ldots}\right)t} \right\} = 0. \tag{a.6}$$

Teraz zajmijmy się punktem q_2. Jest to stabilny stan równowagi, zatem do punktu q_2 danego wzorem (34) dochodzimy po określonej ścieżce (trajektorii) postaci:

$$q_2(t) = q_2 + \left(q_2(0) - q_2 \right) \cdot e^{\mu t}, \tag{a.7}$$

gdzie stopa wzrostu $\mu < 0$ odpowiada ujemnej wartości własnej odpowiedniej macierzy. Zatem

$$\int_0^t \left(\frac{q_2(s)-1}{\chi} \right) ds = \frac{q_2 - 1}{\chi} \cdot t + \frac{q_2(0) - q_2}{\chi} \cdot \int_0^t e^{\mu s} ds = \\ = \frac{q_2 - 1}{\chi} \cdot t + \frac{q_2(0) - q_2}{\chi \mu} \cdot \left(e^{\mu t} - 1 \right), \tag{a.8}$$

co, wykorzystując wzór (34), można zapisać w postaci:

$$\int_0^t \left(\frac{q_2(s)-1}{\chi} \right) ds = (r+\delta)t + \frac{1}{\chi} \sqrt{\ldots} \cdot t + \frac{q_2(0) - q_2}{\chi \mu} \cdot \left(e^{\mu t} - 1 \right). \tag{a.9}$$

Po lewej stronie (a.3) mamy zatem:

$$\lambda_1(0)k_0 \cdot \lim_{t\to\infty}\left\{ q_2(t)e^{-(r+\delta)t} \cdot e^{\int_0^t \left(\frac{q_2(s)-1}{\chi}\right)ds} \right\} =$$

$$= \lambda_1(0)k_0 \cdot \lim_{t\to\infty}\left\{ q_2(t)e^{-(r+\delta)t+(r+\delta)t+\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}\cdot t+\frac{q_2(0)-q_2}{\chi\mu}\left(e^{\mu t}-1\right)} \right\} =$$

$$= \lambda_1(0)k_0 \cdot \lim_{t\to\infty}\left\{ \left[q_2+\left(q_2(0)-q_2\right)\cdot e^{\mu t} \right] e^{\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}\cdot t+\frac{q_2(0)-q_2}{\chi\mu}\left(e^{\mu t}-1\right)} \right\} =$$

$$= \lambda_1(0)k_0 \cdot \left(\lim_{t\to\infty}\left\{ q_2 e^{\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}\cdot t+\frac{q_2(0)-q_2}{\chi\mu}\left(e^{\mu t}-1\right)} \right\} + \right.$$

$$\left. + \lim_{t\to\infty}\left\{ \left(q_2(0)-q_2\right)\cdot e^{\left(\mu+\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}\right)\cdot t+\frac{q_2(0)-q_2}{\chi\mu}\left(e^{\mu t}-1\right)} \right\} \right). \tag{a.10}$$

W powyższym wzorze występuje suma dwóch granic. Pierwsza z nich jest równa $+\infty$, a druga jest równa 0 (gdy $\mu+\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}<0$) lub $+\infty$ (gdy $\mu+\frac{1}{\chi}\sqrt{\ldots}<0$). Z tego wynika, że lewa strona równania (a.3) jest równa $+\infty$, a więc w punkcie q_2 warunek transwersalności (19f) nie jest spełniony.

Bibliografia

Acemoglu, D., 2008, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press.

Barro, R., Sala-i-Martin, X., 1995, *Economic Growth*, 2nd ed., MIT Press, Cambridge.

Fisher, W.H., 2010, *Relative Wealth, Growth, and Transitional Dynamics: The Small Open Economy Case*, Macroeconomic Dynamics, vol. 14, s. 224–242.

Hayashi, F., 1982, *Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation*, Econometrica, vol. 50, no. 1, s. 213–224.

Heijdra, B.J., Romp, W.E., 2009, *Human Capital Formation and Macroeconomic Performance in an Ageing Small Open Economy*, Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 33(3), s. 725–744.

Nielsen, S.B., Sorensen, P.B., 1991, *Capital Income Taxation in a Growing Open Economy*, European Economic Review, vol. 35, iss. 1, s. 179–197.
Rebelo, S., 1992, *Growth in Open Economies*, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, Elsevier, vol. 36(1), s. 5–46.
Romer, P.M., 1986, *Increasing Returns and Long-run Growth*, Journal of Political Economy, vol. 94, s. 1002–1037.
Turnovsky, S.J., 2009, *Capital Accumulation and Economic Growth in a Small Open Economy*, Cambridge University Press.