

Monika Naskręcka

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki
Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej
monika.naskrecka@ue.poznan.pl

**SYMULACJE DLA MODELU GOSPODARKI
KONKURENCYJNEJ Z ZAPASAMI**

Streszczenie: Celem artykułu jest zbadanie za pomocą symulacji, jaki wpływ w modelu równowagi ogólnej typu Arrowa–Debreu–McKenziego na istnienie cen równowagi oraz stabilność modelu ma występowanie zapasów. Gdy w gospodarce wytworzony zostaje nadmiar towarów, mogą one zostać przeniesione przez producentów na kolejny okres i wpłynąć na dynamikę cen. W pracy przedstawiono prosty model gospodarki konkurencyjnej z zapasami, dla którego przeprowadzono obliczenia symulacyjne umożliwiające wyznaczenie trajektorii cen towarów oraz zapasów. Przedstawiony w pracy model równowagi ogólnej jest stabilny przy pewnych szczególnych założeniach podanych we wcześniejszej pracy M. Naskręckiej [2012]. W artykule przebadano zachowanie cen oraz zapasów w przypadku, gdy pozbawimy model tego założenia. Zbadano też, jaki wpływ będzie to miało przede wszystkim na stabilność modelu. Przedstawiono symulacje dla funkcji użyteczności oraz produkcji typu Cobba–Douglasa i na ich podstawie zaproponowano wnioski dotyczące cen równowagi, zapasów oraz stabilności ich trajektorii.

Słowa kluczowe: Model gospodarki konkurencyjnej, równowaga ogólna, zapasy, stabilność, symulacje, twierdzenie Lapunowa.

Klasyfikacja JEL: C61, C62, C63, D50.

**SIMULATIONS FOR A MODEL OF A COMPETITIVE ECONOMY
INCLUDING STOCK LEVELS**

Abstract: Models of general equilibrium make it possible to determine equilibrium prices in a competitive economy. These models are not able to properly describe all the processes taking place in an economy. They do not take into consideration the necessity of storage that arises when there is an excess of products. Thus, the question arises about the influence of stock levels on market equilibrium (or disequilibrium) and stability. This

paper will present a simple model of a competitive economy including stock levels and a simulation of the trajectories of prices and stock levels.

Keywords: competitive economy model, general equilibrium, stock levels, stability, simulations, Lyapunov theory.

Wstęp

Badania nad równowagą ogólną oraz stabilnością gospodarki konkurencyjnej z wykorzystaniem modeli matematycznych dynamiki ekonomicznej sięgają drugiej połowy XIX wieku, kiedy to powstało dzieło L. Walrasa [1874]. Jednak najbardziej intensywny rozwój teorii równowagi ogólnej przypada na lata 1950–1980 i datuje się od opublikowania pracy K.J. Arrowa i G. Debreu [1954]. W okresie tym zbudowano, zbadano i prześledzono wiele wersji modeli gospodarki konkurencyjnej, badając głównie warunki istnienia równowagi, jej jednoznaczność oraz stabilność (globalną, lokalną). Gospodarka konkurencyjna osiąga stan równowagi, gdy ustalą się w niej takie ceny, przy których dochodzi do zrównania popytu z podażą dla każdego towaru. Gospodarka stabilna charakteryzuje się tym, że wytrącona ze stanu równowagi potrafi samoczynnie do niego po pewnym czasie powrócić, czego wyrazem jest powrót z upływem czasu trajektorii cen do cen równowagi. W modelu takiej gospodarki zakłada się zazwyczaj, że dynamika cen w gospodarce opisana jest za pomocą układu równań różniczkowych postaci

$$\dot{p}(t) = \sigma F(p(t)), \quad (1)$$

gdzie:

t – czas; czas jest tu zmienną ciągłą, $t \geq 0$,

n – liczba towarów dostępnych w gospodarce,

$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ – wektor cen towarów w momencie t ,

$f(p(t)) = (f_1(p(t)), f_2(p(t)), \dots, f_n(p(t)))$ – całkowity popyt na towary w momencie t ,

$g(p(t)) = (g_1(p(t)), g_2(p(t)), \dots, g_n(p(t)))$ – całkowita podaż towarów utożsamiana z ich produkcją w gospodarce w momencie t ,

$F(p(t)) = (F_1(p(t)), F_2(p(t)), \dots, F_n(p(t)))$ – funkcja popytu nadwyżkowego, $F(p(t)) = f(p(t)) - g(p(t))$,

σ – dodatni współczynnik siły reakcji cen na nierównowagę [Arrow i Hurwicz 1958; Arrow, Block, Hurwicz 1959].

Model (1) służy do wyznaczania cen równowagi rynkowej, ale nie nadaje się do opisu rzeczywistych zachowań podmiotów na rynku konkurencyjnym. Decyzje kupna–sprzedaży zapadają bowiem niezależnie od tego, czy mamy na nim do czynienia z cenami równowagi, czy nie. Konsumenci oraz producenci nie odkładają swoich decyzji do momentu, aż ustalone zostaną ceny równowagi, choćby dlatego, że cen takich po prostu nie znają. Zanim ceny faktycznie zbliżą się do ich poziomu w równowadze, w gospodarce może się utrzymywać przez dłuższy okres nierównowaga, czyli sytuacja, w której popyt nadwyżkowy na rynku na przynajmniej niektóre towary będzie dodatni lub ujemny. Gdy wartość ta jest dodatnia, popyt części konsumentów nie zostaje zaspokojony, a gdy jest ujemna, w gospodarce powstają zapasy (zakładamy, że wyprodukowane towary są trwałe). Nie są one jednak w układzie (1) w żaden sposób uwzględnione [Panek 2011].

W literaturze nie ma zbyt wielu modeli równowagi z zapasami wynikającymi z nadwyżki podaży nad popytem. Próby wprowadzenia zapasów do modelu równowagi ogólnej można znaleźć między innymi w pracy E. Panka [2011], jednak zaproponowany tam model rynku nie uwzględnia wpływu, jaki zapasy mają na dynamikę cen. Jest to założenie niekoniecznie zgodne z tym, co obserwujemy w rzeczywistości. Producenci posiadający zapasy będą brali je pod uwagę, podejmując decyzję o produkcji, a to pośrednio wpłynie na ceny. Problemem zapasów w modelu równowagi ogólnej zajmowali się ponadto między innymi F. Hahn i T. Negishi [1962], R.A. Diamond [1967] oraz F. Fisher [1983]. W niniejszym artykule przedstawiono pokrótce model równowagi ogólnej z zapasami przedstawiony szczegółowo w pracy M. Naskręckiej [2013], w którym wprowadzono pewne dodatkowe założenia, przy których udowodniono istnienie cen równowagi oraz stabilność modelu. Celem pracy było zbadanie, czy w modelu tym bez dodatkowych założeń również istnieją ceny równowagi, jak brak tego założenia wpłynie na zapasy w stanie równowagi oraz czy model ten nadal pozostanie stabilny. Za metodę badawczą w pracy przyjęto symulacje komputerowe. Przedstawiony model ciągły został przybliżony modelem dyskretnym i dla pewnych początkowych warunków oraz funkcji użyteczności i produkcji przeprowadzono symulacje za pomocą programu Excel.

1. Model równowagi ogólnej z zapasami

Na rynku przebywa m konsumentów oraz l producentów. Każde przedsiębiorstwo będzie chciało zmaksymalizować swój zysk. Każdy konsument będzie chciał natomiast zmaksymalizować użyteczność nabywanego przez siebie koszyka. Nie może on jednak kupić więcej, niż zarobi. Jego dochód składa się z przychodów, które uzyska po sprzedaży swojego koszyka początkowego, oraz z udziałów w zyskach przedsiębiorstw. W modelu przyjęto, że zarówno konsument, jak i producent zakładają, że uda im się zrealizować swoje oczekiwania. Stąd producent zakłada, że uda mu się sprzedać całą swoją produkcję, łącznie z zapasami.

Producent j -ty będzie dysponował pewnym wektorem czynników produkcji $k^j = (k_1^j, k_2^j, \dots, k_n^j) \in Y^j \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ($Y^j, j = 1, 2, \dots, l$, są zbiorami domkniętymi i wypukłymi w $\mathbb{R}_+^n$) oraz będzie go charakteryzował pewna funkcja produkcji $q(k): Y^j \rightarrow \mathbb{R}_+^1$. Będzie ona funkcją ciągłą, rosnącą, wklęsłą, dodatnio jednorodną stopnia zero oraz dla argumentu zero będzie przyjmowała wartość zero ($q(0) = 0$). Przez wektor $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ rozumiemy wektor cen towarów oraz czynników produkcji na rynku, a przez wektor $\phi^j = (\phi_1^j, \phi_2^j, \dots, \phi_n^j)$ wektor zapasów na rynku. Zadanie optymalizacyjne j -tego producenta będzie miało postać:

$$\max \langle p, q^j(k) + \phi^j - k \rangle,$$

$$k^j \in Y^j,$$

($\langle x, y \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y), a stąd

$$\bar{k}^j = g^j(p, \phi) = \arg \max_{k^j \in Y^j} \langle p, q^j(k) + \phi^j - k \rangle.$$

Konsument r -ty będzie natomiast szukał koszyka towarów $x^r \in X^r$ (zbiory $X^r, r = 1, 2, \dots, m$, są domknięte w $\mathbb{R}_+^n$, wypukłe oraz dla dowolnego i i dla każdego wektora $x \in X^r$ istnieje wektor $x' \in X^r$, dla którego $u^r(x') > u^r(x)$). Jego preferencje opisane są za pomocą ciągłej, rosnącej i wklęsłej na X^r funkcji użyteczności $u^r(x): X^r \rightarrow \mathbb{R}_+^1$. Zachowanie r -tego konsumenta można opisać za pomocą zadania:

$$\begin{aligned} \max u^r(x), \\ \langle p, x^r \rangle \leq \langle p, a^r \rangle + \sum_{j=1}^l \alpha_{rj} \pi_j(k), \\ x^r \in X^r, \end{aligned}$$

gdzie przez $\pi_j(k) = \langle p, q^j(k) + \phi^j - k \rangle$ rozumiemy zysk j -tego producenta, przez $a^r = (a_1^r, a_2^r, \dots, a_n^r) > 0$ rozumiemy koszyk początkowy r -tego konsumenta, a $\alpha_{rj} \in [0, 1]$ oznacza udział r -tego konsumenta w zyskach j -tego przedsiębiorstwa, przy czym dla każdego przedsiębiorstwa musi zachodzić warunek $\sum_{r=1}^m \alpha_{rj} = 1$. Rozwiązaniem tego zadania jest

$$\bar{x}^r = f^r(p, \phi) = \arg \max_{\substack{\langle p, x^r \rangle \leq \langle p, a^r \rangle + \sum_{j=1}^l \alpha_{rj} \pi_j(k) \\ x^r \in X^r}} u^r(x).$$

Dokładniej zadania te zostały opisane w pracy E. Panka [2003].

Niech:

- $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$, tak jak w układzie równań (1), oznacza wektor cen w momencie t ,
- $f(p(t), \phi(t)) = (f_1(p(t), \phi(t)), f_2(p(t), \phi(t)), \dots, f_n(p(t), \phi(t)))$ – wielkość całkowitego popytu na towary w gospodarce w momencie t ,
- $g(p(t), \phi(t)) = (g_1(p(t), \phi(t)), g_2(p(t), \phi(t)), \dots, g_n(p(t), \phi(t)))$ – wielkość całkowitej produkcji towarów w gospodarce, w momencie t .

Przez $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$ oznaczmy wektor zapasów towarów w gospodarce w momencie t . Niech:

$$F_i(p(t), \phi(t)) = f_i(p(t), \phi(t)) - g_i(p(t), \phi(t)) - \phi_i(t)$$

oraz

$$G_i(p(t), \phi(t)) = g_i(p(t), \phi(t)) - f_i(p(t), \phi(t)).$$

Modelem równowagi ogólnej z zapasami nazywamy układ równań

$$\dot{p}_i(t) = \sigma F_i(p(t), \phi(t)), \quad (2)$$

$$\dot{\phi}_i(t) = \begin{cases} g_i(p(t), \phi(t)) - f_i(p(t), \phi(t)) - \beta \phi_i(t), & \text{gdy } \phi_i(t) \in (0, A) \\ \text{lub } \phi_i(t) = 0 \wedge G_i(p(t), \phi(t)) \geq 0 & \\ \text{lub } \phi_i(t) = A \wedge G_i(p(t), \phi(t)) - \beta \phi_i(t) \leq 0, & \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (3)$$

gdzie: $G_i(p(t), \phi(t)) = g_i(p(t), \phi(t)) - f_i(p(t), \phi(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\phi(0) = \phi^0 \geq 0$, $\beta \in (0, 1)$ oznacza stopę deprecjacji zapasów, $\sigma > 0$ oznacza współczynnik siły reakcji cen na zmianę popytu i podaży, a $A \in \mathbb{R}^n$, $A < 0$, oznacza maksymalny dopuszczalny poziom zapasów w gospodarce.

Na rynku może zająć kilka wykluczających się sytuacji:

- $f_i(p(t), \phi(t)) > g_i(p(t), \phi(t))$ – całkowity popyt na i -ty towar przekracza jego produkcję; aby zaspokoić powstałą nadwyżkę popytu, producenci korzystają ze swoich zapasów;
- $f_i(p(t), \phi(t)) > g_i(p(t), \phi(t)) + \phi_i(t)$ – cała produkcja oraz całe dotychczas zgromadzone zapasy towaru zostają przeznaczone na zaspokojenie popytu konsumentów, jednak część popytu pozostaje nadal niezaspokojona;
- $g_i(p(t), \phi(t)) < f_i(p(t), \phi(t)) \leq g_i(p(t), \phi(t)) + \phi_i(t)$ – cała produkcja i -tego towaru oraz część lub całość zapasów zostaje skierowana na pełne zaspokojenie popytu konsumentów;
- $f_i(p(t), \phi(t)) = g_i(p(t), \phi(t))$ – całkowity popyt na i -ty towar jest równy jego całkowitej produkcji, producenci nie muszą korzystać z zapasów, które ulegają naturalnemu zużyciu;
- $f_i(p(t), \phi(t)) < g_i(p(t), \phi(t))$ produkcja i -tego towaru przewyższa popyt zgłaszany na ten towar, powstają zapasy [Naskręcka 2013].

W pracy zostały przyjęte założenia przyjmowane standardowo w modelach równowagi ogólnej [Panek 2003]:

$$(I) \quad f \in C^1(\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n), \quad g \in C^1(\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n), \\ \phi \in C^1(\mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^n);$$

$$\forall \phi \in \mathbb{R}_+^n \forall p \in P_+(1) = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\} \forall \lambda = p^1 - p^2, p^1 = p^2 \wedge p^1 \neq p^2;$$

$$\lambda J(p, \phi) \lambda^T < 0,$$

$$\text{gdzie } J(p, \phi) = \left(\frac{\partial F(p, \phi)}{\partial p_j} \right)_{n \times n}, F(p, \phi) = f(p, \phi) - g(p, \phi) - \phi$$

$$\text{oraz } x = \sum_i |x_i|;$$

- (III) $\forall p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \geq (0, 0, \dots, 0) \forall \alpha > 0 f(\alpha p, \phi) = f(p, \phi) \wedge g(\alpha p, \phi) = g(p, \phi)$ (dodatnia jednorodność stopnia zero funkcji podaży oraz funkcji popytu ze względu na ceny);
- (IV) $\forall \phi \in \mathbb{R}_+^n p_i = 0 \Rightarrow F_i(p, \phi) > 0$ (popyt na towar, którego cena wynosi 0, zawsze będzie wyższy od jego podaży);
- (V) $\forall p > 0 \langle p, f(p, \phi) - g(p, \phi) - \phi \rangle = 0$ (prawo Walrasa); symbolem $\langle x, y \rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów x i y .

Definicja 1. Przez stan równowagi w modelu gospodarki konkurencyjnej (2)–(3) rozumiemy punkt osobliwy (stan stacjonarny) $\bar{p} > 0, \bar{\phi} \geq 0$ tego układu, tj. rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} f(\bar{p}, \bar{\phi}) - g(\bar{p}, \bar{\phi}) - \bar{\phi} = 0, \\ g(\bar{p}, \bar{\phi}) - f(\bar{p}, \bar{\phi}) - \beta \bar{\phi} = 0. \end{cases}$$

W gospodarce opisanej za pomocą modelu (2)–(3) istnieją ceny równowagi ogólnej $\bar{p} > 0$ określone jednoznacznie z dokładnością do struktury. Dowód tej własności przebiega analogicznie do przeprowadzonego w pracy Panka [2011].

W standardowych modelach gospodarki konkurencyjnej, które nie uwzględniają zapasów, stabilność gospodarki oznacza zbieżność dowolnej jej trajektorii do pewnego wektora cen równowagi. W przedstawionym modelu, oprócz trajektorii cen, występuje również trajektoria zapasów. Stabilność powinna więc zostać zdefiniowana zarówno dla trajektorii cen, jak i dla trajektorii zapasów.

Definicja 2. Określone na półosi czasu $\mathbb{R}_+^1 = [0, +\infty)$ rozwiązanie układu równań różniczkowych (2)–(3) z dodatnią funkcją cen $p(t)$ spełniającą warunek początkowy $p(0) = p^0 > 0$ oraz nieujemną funkcją zapasów $\phi(t)$ spełniającą warunek początkowy $\phi(0) = \phi^0 \geq 0$, nazywać będziemy (p^0, ϕ^0) -dopuszczalną trajektorią cen i zapasów w modelu gospodarki konkurencyjnej z zapasami.

Stabilność w modelu gospodarki konkurencyjnej bez zapasów jest rozumiana jako zbieżność trajektorii cen do wektora cen równowagi. Dla modelu (2)–(3) należy uwzględnić również trajektorię zapasów.

Definicja 3. Niech $\bar{p}$ oznacza wektor cen równowagi. Gospodarkę, którą opisuje układ równań (2)–(3) z warunkiem początkowym $p(0) = p^0 > 0$, $\phi(0) = \phi^0 \geq 0$, nazywamy (globalnie) asymptotycznie stabilną, jeżeli dowolna (p^0, ϕ^0) -dopuszczalna trajektoria cen i zapasów spełnia warunek:

$$\forall p^0 > 0 \forall \phi^0 \geq 0 \exists \bar{p} \in P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \bar{p} \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0 \right).$$

Gospodarka będzie więc globalnie stabilna, jeżeli każda trajektoria cen będzie dążyła do pewnego wektora cen równowagi, a zapasy będą malały do zera [Panek 2011].

Przy założeniach (I)–(V) oraz dodatkowym założeniu:

$$(VI) \quad \forall t > 0 \quad \langle \phi(t), \dot{\phi}(t) \rangle \leq 0 \quad \text{lub} \quad \langle \bar{p}, \dot{p}(t) \rangle > \langle \phi(t), \dot{\phi}(t) \rangle$$

gospodarka konkurencyjna opisana przez układ równań (2)–(3) jest globalnie asymptotycznie stabilna. Dowód stabilności znajduje się we wcześniejszej pracy autorki [Naskręcka 2012].

Pojawia się jednak pytanie, czy jeśli opuścimy założenie (VI), gospodarka ta nadal będzie stabilna w sensie definicji 3. Aby sprawdzić jej własność przy braku założenia (VI), dla modelu (2)–(3) zostaną przeprowadzone symulacje.

Symulacje

Niech na rynku będzie dwóch konsumentów oraz dwa przedsiębiorstwa. Konsumenci zgłaszają popyt na dwa dostępne na rynku towary

$x^i = (x_1^i, x_2^i)$, $i = 1, 2$ (indeksem $i = 1, 2$ oznaczamy odpowiednio pierwszego i drugiego konsumenta) oraz dostarczają przedsiębiorstwom czynniki produkcji $a^i = (a_1^i, a_2^i)$, $i = 1, 2$. Każdy z konsumentów uzyskuje dochód, sprzedając czynniki produkcji oraz partycypując w zyskach producentów. Konsumenti mają określone udziały $\alpha_l^i \geq 0$ w zyskach producentów spełniające warunek:

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_l^i = 1, \quad l = 1, 2.$$

Producenci produkują po dwa towary $y^j = (y_1^j, y_2^j)$, $j = 1, 2$ i zużywają do tego czynniki produkcji $k^j = (k_1^j, k_2^j)$, $j = 1, 2$, które nabywają u konsumentów. Każdy producent może posiadać zapasy wyprodukowanych towarów $\phi^j = (\phi_1^j, \phi_2^j)$. Dla uproszczenia w modelu przyjęto, że wszystkie zapasy znajdujące się na rynku w danym momencie dzielone są równo pomiędzy producentów. Ceny towarów są określone przez wektor $p = (p_1, p_2)$, a ceny czynników produkcji – przez wektor $p' = (v_1, v_2)$. Pierwszy konsument określa swoje preferencje za pomocą funkcji użyteczności postaci $u^1(x_1^1, x_2^1) = 8(x_1^1)^{\frac{1}{4}}(x_2^1)^{\frac{3}{4}}$, a w każdym okresie dysponuje 20 jednostkami pierwszego czynnika produkcji oraz 30 jednostkami drugiego czynnika produkcji, $a^1 = (20, 30)$. Konsument pierwszy maksymalizuje swoją użyteczność przy ograniczeniu budżetowym postaci:

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 \leq v_1 \cdot 20 + v_2 \cdot 30 + 0,4 \left(p_1 (y_1^1 + \phi_1^1) - v_1 k_1^1 + p_2 (y_2^1 + \phi_2^1) - v_2 k_2^1 \right) + \\ + 0,5 \left(p_1 (y_1^2 + \phi_1^2) - v_1 k_1^2 + p_2 (y_2^2 + \phi_2^2) - v_2 k_2^2 \right),$$

gdzie $\alpha_1^1 = 0,4$, $\alpha_2^1 = 0,5$ to udział konsumenta w zyskach obu przedsiębiorstw. Drugi z konsumentów przypisaną ma odpowiednio funkcję użyteczności $u^2(x_1^1, x_2^1) = 9(x_1^2)^{\frac{2}{3}}(x_2^2)^{\frac{1}{3}}$ oraz wektor czynników produkcji $a^2 = (28, 20)$, a jego ograniczenie budżetowe przyjmuje postać:

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 \leq v_1 \cdot 28 + v_2 \cdot 20 + 0,6 \left(p_1 (y_1^1 + \phi_1^1) - v_1 k_1^1 + p_2 (y_2^1 + \phi_2^1) - v_2 k_2^1 \right) + \\ + 0,5 \left(p_1 (y_1^2 + \phi_1^2) - v_1 k_1^2 + p_2 (y_2^2 + \phi_2^2) - v_2 k_2^2 \right).$$

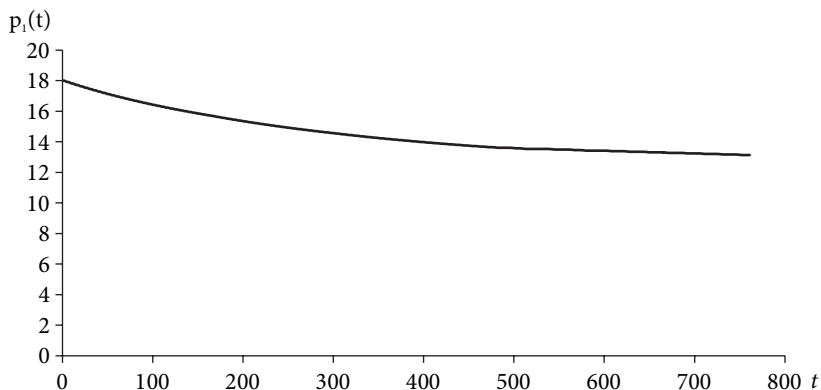
Producenci maksymalizują swoje zyski i posługują się przy tym odpowiednio funkcjami produkcji postaci

$$q^1(k_1^1, k_2^1) = \left(4(k_1^1)^{\frac{1}{2}} (k_2^1)^{\frac{1}{4}}, 2(k_1^1)^{\frac{1}{2}} (k_2^1)^{\frac{1}{4}} \right), \\ q^2(k_1^2, k_2^2) = \left(3(k_1^2)^{\frac{1}{3}} (k_2^2)^{\frac{1}{3}}, 6(k_1^2)^{\frac{1}{3}} (k_2^2)^{\frac{1}{3}} \right).$$

W symulacji współczynnik siły reakcji cen na nierównowagę został ustalony na poziomie $\sigma = 0,001$, a współczynnik deprecjacji zapasów $\beta = 0,6$.

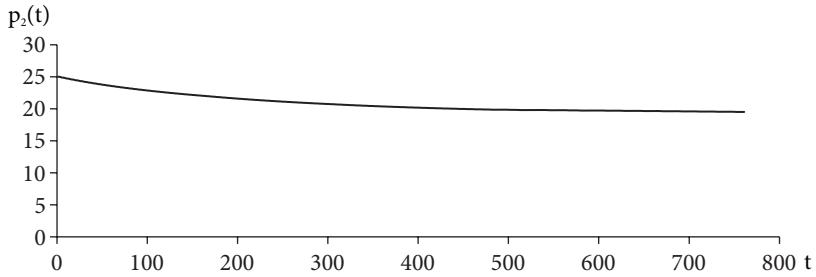
Dla tak sformułowanych zadań optymalizacyjnych konsumentów i producentów przeprowadzono następnie symulację przebiegu trajektorii cen oraz zapasów. W modelu ceny zbiegają do cen równowagi $\bar{p} = (13,13; 19,5)$ – por. rysunki 1 i 2.

Symulacje dla zapasów wskazują, że dla stabilnych cen, zapasy niekoniecznie będą zbiegały do zera. Od pewnego momentu zaczynają zmieniać się sinusoidalnie na domkniętym obszarze $[0, 50]$. Wynik ten sugeruje, że przy braku założenia (VI) pomimo stabilności cen zapasy nie będą zbiegały do zera, lecz będą oscylowały w pewnym przedziale bliskim zera (por. rysunki 3 i 4).

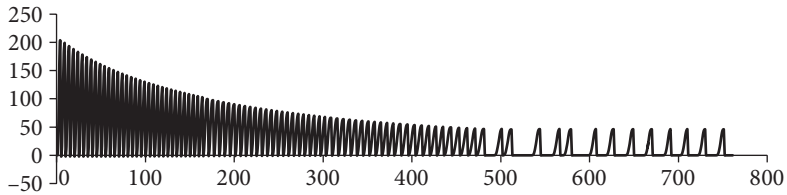


Rysunek 1. Trajektoria ceny towaru pierwszego

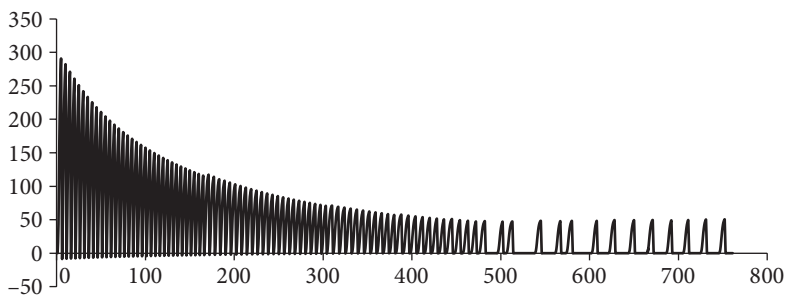
Źródło: Obliczenia własne

**Rysunek 2. Trajektoria ceny towaru drugiego**

Źródło: Obliczenia własne

**Rysunek 3. Trajektoria zapasów towaru pierwszego**

Źródło: Obliczenia własne

**Rysunek 4. Trajektoria zapasów towaru drugiego**

Źródło: Obliczenia własne

Podsumowanie

W przedstawionym modelu gospodarki konkurencyjnej z zapasami (2)–(3) istnieją ceny równowagi. Dla założeń (I)–(VI) ceny oraz zapasy są stabilne w rozumieniu definicji 3. Przeprowadzone symulacje przy braku założenia (VI) potwierdziły istnienie cen równowagi oraz zbieżność do nich trajektorii cen towarów. Uważniejszego sprawdzenia wymaga stabilność zapasów, które oscylują po pewnym domkniętym obszarze. Nie będą one zbiegały do zera, a symulacje wyraźnie wskazują na ich oscylację w pewnym stałym przedziale. Wyniki te sugerują, że przy tak zdefiniowanym modelu tylko ceny będą się zachowywały w sposób stabilny w sensie definicji 3. Opuszczając w modelu założenie (VI), należałoby więc się zastanowić nad zmianą definicji zarówno stanu równowagi, jak i stabilności lub też nad innym sformułowaniem modelu wymiany towarów pomiędzy konsumentem a producentem.

Bibliografia

- Arrow, K.J., Debreu, G., 1954, *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, *Econometrica*, vol. 22, no. 3, s. 265–290.
- Arrow, K.J., Hurwicz, L., 1958, *On the Stability of the Competitive Equilibrium I*, *Econometrica*, vol. 26, no. 4, s. 522–552.
- Arrow, K.J., Block, H.D., Hurwicz, L., 1959, *On the Stability of the Competitive Equilibrium II*, *Econometrica*, vol. 27, no. 1, s. 82–109.
- Diamond, P.A., 1967, *The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty*, *The American Economic Review*, vol. 57, no. 4, s. 759.
- Fisher, F., 1983, *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hahn, F., Negishi, T., 1962, *A Theorem of Non-Tâtonnement Stability*, *Econometrica*, vol. 30, no. 3, s. 463–469.
- Naskręcka, M., 2013, *Problem zapasów w modelu gospodarki konkurencyjnej*, w: Panek, E. (red.), *Matematyka w ekonomii. Teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Panek, E., 2003, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Panek, E., 2011, *System Walrasa i zapasy*, *Przegląd Statystyczny*, vol. 58, no. 3–4, s. 195–204, Warszawa.
- Walras, L., 1874, *Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*, L. Corbaz & cie, Lousanne.