

Karolina Sobczak

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki
Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej
karolina.sobczak@ue.poznan.pl

METODA BLANCHARDA-KAHNA ROZWIĄZYWANIA MODELI DSGE NA PRZYKŁADZIE PODSTAWOWEGO MODELU NOWEJ SZKOŁY KEYNESOWSKIEJ

Streszczenie: W opinii wielu ekonomistów stochastyczne dynamiczne modele równowagi ogólnej (*dynamic stochastic general equilibrium*, DSGE) są głównym kierunkiem badań we współczesnej teorii ekonomii [Gali 2008; Baranowski i in. 2013]. Trudno jednak natrafić na prace wprowadzające do metodologii modeli DSGE. Dlatego chcemy zaproponować omówienie podstaw modeli DSGE, które pozwoli uzupełnić tę lukę. W tym celu posłużymy się podstawowym modelem nowej szkoły keynesowskiej, w którym zakłada się zróżnicowanie dóbr, konkurencję monopolistyczną oraz inercję cen [Calvo 1983].

Rozwiązanie układu równań modelu DSGE jest dokonywane za pomocą metod numerycznych. Jedną z pierwszych technik stosowanych do rozwiązywania ekonomicznych liniowych modeli racjonalnych oczekiwań była metoda Blancharda-Kahna [Blanchard i Kahn 1980]. Używa się w niej log-liniowej aproksymacji warunków pierwszego rzędu wynikających z wyjściowego problemu optymalizacji [Sims 2002], aby złożony układ nieliniowy przekształcić w układ liniowy. Metoda Blancharda-Kahna opiera się na rachunku macierzowym i określa własności macierzy układu równań modelu gwarantujące istnienie oraz stabilność rozwiązania. Problem wartości własnych macierzy przekłada się na problem doboru odpowiednich wartości strukturalnych parametrów modelu oraz ich kombinacji.

Słowa kluczowe: log-linearyzacja, metoda Blancharda-Kahna, modele DSGE, nowa szkoła keynesowska.

Klasyfikacja JEL: C62, C68, E12, E52.

THE BLANCHARD-KAHN METHOD OF SOLVING DSGE MODELS – A CASE OF THE BASIC NEW KEYNESIAN MODEL

Abstract: In the opinion of many economists, DSGE (dynamic stochastic general equilibrium) models can be viewed as a leading stream of modern macroeconomic theory [Galí 2008; Baranowski et al., 2013]. However, it is difficult to find any works which introduce DSGE methodology, especially for readers who are not familiar with the issue. In the Polish literature there are no introductory contributions. Therefore, we would like to present an overview of the fundamentals of DSGE models to fill this gap. To this end we use the basic New Keynesian model, which assumes product differentiation, monopolistic competition and staggered price setting [Calvo 1983].

Solving the equations of the DSGE model system is achieved by means of numerical methods. One of the first techniques proposed for solving linear rational expectations models originates from Blanchard and Kahn [Blanchard, Kahn, 1980]. The method uses the log-linear approximation of optimal conditions for the initial optimization problem underlying the model [Sims 2002]. It is based on matrix calculus and determines the properties of the eigenvalues of the system matrices. The problem of the eigenvalues translates into the problem of selecting appropriate values for the structural parameters of the model or their combinations. This method makes it possible to determine if there exists a locally unique stable solution to the system.

Keywords: Blanchard-Kahn method, DSGE models, log-linearization, New Keynesian economics.

Wstęp

W opinii wielu ekonomistów stochastyczne dynamiczne modele równowagi ogólnej (*dynamic stochastic general equilibrium*, DSGE) stanowią główny kierunek we współczesnej teorii ekonomii [Galí 2008]. Ich konstrukcja jest wynikiem połączenia podstaw teorii realnego cyklu koniunkturalnego (*Real Business Cycle*, RBC) z metodologicznymi aspektami mikroekonomii oraz podejść stosowanych w statystyce. Natomiast w warstwie pojęciowej metodologia tych modeli czerpie z takich trendów ekonomicznych, jak nowa szkoła keynesowska, nowa makroekonomia gospodarki otwartej czy nowa ekonomia instytucjonalna.

Ze względu na wciąż pogłębiające się zainteresowanie modelami DSGE światowa literatura z zakresu ich metodologii modeli jest dość obszerna i wciąż

uzupełniana o nowe pozycje¹. Jednak, ponieważ w teorii ekonomii modele DSGE to wciąż stosunkowo młoda dziedzina, artykuły z tego zakresu prezentują wiedzę wysoce specjalistyczną i traktującą o szczegółowych zagadnieniach. Natomiast trudniej natrafić na prace wprowadzające do metodologii modeli DSGE, zwłaszcza czytelnika pragnącego dopiero zapoznać się z tą tematyką². W literaturze polskiej brak jest w ogóle takich pozycji³. Dlatego chcemy zaproponować omówienie podstaw modeli DSGE, które pozwoli uzupełnić tę lukę⁴.

W artykule skoncentrujemy się na objaśnieniu praktycznych aspektów pracy z modelami DSGE, a konkretnie na rozwiązywaniu układu równań modelu. Podstawy teoretyczne, zwłaszcza dotyczące założeń stosowanych w konstrukcji modeli DSGE, odwołują się do teorii realnego cyklu koniunkturalnego oraz nowej szkoły keynesowskiej⁵. Syntezę tych zagadnień można odnaleźć m. in. w pracy J. Gali'ego [2008] oraz McCandlessa [2008]. Dla naszych celów posłużymy się przykładem, bardzo prostego w swojej klasie, modelu gospodarki zamkniętej, stosowanego w analizie polityki monetarnej⁶,

¹ Jako syntezę, ale również przegląd modeli DSGE stosowanych do analizy polityki monetarnej, warto polecić pracę [Gali 2008].

² W podręczniku [McCandless 2008] można znaleźć rozdziały poświęcone wprowadzeniu do modeli DSGE. Jednak i w tej pracy zakłada się pewne wstępne zaznajomienie czytelnika z metodologią modeli DSGE. Bardzo pomocną pozycją okazuje się przewodnik [Mancini Griffoli 2007–2008] napisany na potrzeby objaśnienia oprogramowania DYNARE, z naciskiem na aspekty techniczne i szczegóły implementacji różnego typu procedur matematycznych używanych przy rozwiązywaniu modeli DSGE.

³ Użyteczne może się okazać zapoznanie z pracą [Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk 2007]. Prezentowany w niej model jest bardziej złożony. Natomiast czytelnik może znaleźć liczne odwołania na temat szczegółowych zagadnień, a także przejrzyste i wyczerpujące objaśnienie wielu aspektów teoretycznych.

⁴ Artykuł został opracowany na podstawie części I rozdziału rozprawy doktorskiej [Sobczak 2013] pt. „*Effect of nominal convergence criteria on real side of economy in DSGE models*” przygotowanej w Katedrze Ekonomii Matematycznej na Wydziale Informatyki i Gospodarki Elektronicznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu pod kierunkiem profesora Krzysztofa Malagi oraz pod kierunkiem profesora Jeana-Christopha Poutineau z Uniwersytetu Rennes 1 w Rennes.

⁵ Matematyczne podstawy nurtu nowej ekonomii keynesowskiej można znaleźć również w [Romer 2014].

⁶ Przedstawienie modelu w znacznej mierze opiera się na III rozdziale książki [Gali 2008], w której autor określa prezentowany przez siebie model jako podstawowy model nowej szkoły keynesowskiej. Charakterystyczne założenia modelu są bowiem zaczerpnięte z nowej szkoły keynesowskiej. Dotyczy to m.in. zróżnicowania dóbr, konkurencji monopolistycznej, inercji cenowej, a także wpływu polityki monetarnej na realną sferę gospodarki.

który za Galím [2008] nazywać będziemy podstawowym modelem nowej szkoły keynesowskiej (*basic New Keynesian model*, BNK).

Przed przejściem do zasadniczej części artykułu, której celem jest przedstawienie jednej z metod rozwiązywania układu równań modelu DSGE, zaprezentujemy krótko podstawy konstrukcji teoretycznej w formie równań wynikających z warunków pierwszego rzędu oraz warunków równowagi ogólnej. Następnie omówimy wybraną metodę, to jest metodę Blancharda-Kahna [Blanchard i Kahn 1980]. Stanowi ona przykład jednej z pierwszych technik numerycznych stosowanych do rozwiązywania ekonomicznych liniowych modeli racjonalnych oczekiwań⁷. Ponieważ model jest nieliniowy, dokonujemy log-liniowej aproksymacji warunków pierwszego rzędu wynikających z wyjściowych problemów optymalizacji [Sims 2002]. Dla przeprowadzenia linearyzacji potrzebne jest wyznaczenie stanu ustalonego (*steady state*), wokół którego rozwijamy warunki konieczne. Dlatego najpierw należy wyznaczyć wartości wszystkich zmiennych modelu w stanie ustalonym. Na koniec zaprezentujemy podstawy oraz ideę metody Blancharda-Kahna dla potrzeb rozwiązania układu równań prostego modelu DSGE. Metoda opiera się na rachunku macierzowym i określa własności macierzy układu gwarantujące istnienie oraz stabilność rozwiązania. Problem wartości własnych macierzy przekłada się na problem doboru odpowiednich wartości strukturalnych parametrów modelu oraz ich kombinacji.

1. Podstawowy model nowej szkoły keynesowskiej

W podstawowym modelu nowej szkoły keynesowskiej zakładamy zróżnicowanie produktów (*goods differentiation*), konkurencję monopolistyczną (*monopolistic competition*) oraz inercję cen produktów (*price rigidity*) według schematu [Calvo 1983], która polega na tym, że w każdym okresie tylko pewna część producentów ma możliwość zmiany cen swoich produktów i ustalenia ceny optymalnej. Pozostała część musi przyjąć cenę z poprzedniego okresu. W modelu występują cztery rodzaje podmiotów gospodarczych. Reprezentatywne gospodarstwo domowe konsumuje dobro finalne oraz pracuje w firmach produkujących dobra pośrednie. Zakładamy, że takich firm jest nieskończenie wiele, a każda z nich jest monopolistą na rynku określonego towaru, posiadając tym samym siłę rynkową do ustalania ceny produkowanego przez

⁷ O metodach rozwiązywania racjonalnych oczekiwań wspomniano również w pracy [Kuchta i Piłat 2010].

siebie dobra. Reprezentatywna firma produkująca dobro finalne tworzy je, mając do dyspozycji wiele odmiennych typów towarów dostarczanych przez firmy pośrednie. Następnie na rynku działającym w warunkach konkurencji doskonalej sprzedaje to dobro gospodarstwu domowemu w postaci koszyka konsumpcyjnego. Czwartym rodzajem podmiotu gospodarczego są władze monetarne, które ustalają poziom nominalnej stopy procentowej.

1.1. Konsumenci

Reguły, zgodnie z którymi reprezentatywne gospodarstwo domowe podejmuje swoje decyzje odnośnie do bieżących i przyszłych poziomów pracy, konsumpcji oraz oszczędności, wynikają z rozwiązania zadania maksymalizacji zdyskontowanej użyteczności oczekiwanej przez wszystkie okresy życia, a czerpanej z konsumpcji oraz czasu wolnego, przy ograniczeniu budżetowym występującym w każdym okresie⁸. Mają one dla ustalonego okresu następującą postać:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^\gamma L_t^\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_t} = \beta E_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right], \quad (2)$$

gdzie:

W_t – płaca nominalna,

R_t – nominalna stopa procentowa,

C_t – poziom konsumpcji dobra finalnego,

P_t – indeks cen towarów,

L_t – liczba godzin pracy wykonywanej przez reprezentatywne gospodarstwo domowe⁹,

$\beta \in (0, 1)$ – czynnik dyskonta,

φ – elastyczność krańcowej nieużyteczności względem pracy,

$\gamma > 0$ – współczynnik względnej awersji do ryzyka.

⁸ W artykule nie przedstawiamy szczegółowo zadań optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych poszczególnych rodzajów. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do pracy [Galí 2008]. Koncentrujemy się na wynikach tych zadań, które wykorzystamy do interpretacji własności modelu oraz rozwiązania układu jego równań.

⁹ W dalszej części artykułu zmienną L_t będziemy utożsamiać z liczbą osób zatrudnionych w firmach pośrednich pochodzących z reprezentatywnego gospodarstwa domowego i określać jako siłę roboczą lub krótko jako pracę.

Reguły (1) i (2) określają, ile czasu gospodarstwo domowe przeznaczy na pracę oraz ile chce przeznaczyć na konsumpcję, a ile zaoszczędzić w formie zakupu obligacji ze stopą zwrotu R_t . Decyzje konsumentów zależą od przewidywanych przez nich przyszłych poziomów płac nominalnych, cen oraz stóp procentowych.

Na konsumpcję dobra finalnego składają się wszystkie dobra pośrednie, których jest nieskończenie wiele. Zakładamy, że poziom konsumpcji dobra finalnego jest określony przez następujący indeks, nazywany agregatem Dixita-Stiglitz [Dixit i Stiglitz 1977]:

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} di \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (3)$$

gdzie:

$C_t(i)$ – ilość i -tego dobra pośredniego,

$\sigma > 1$ – oznacza elastyczność substytucji pomiędzy dobrami.

Równanie (3) określa strukturę popytu, to znaczy jaką ilość każdego z dóbr pośrednich powinien zakupić producent dobra finalnego, który oferuje konsumentom swój towar w postaci koszyka konsumpcyjnego.

Rozwiązaniem zadania problemu maksymalizacji zysku, osiąganego przez producenta dobra finalnego działającego w warunkach konkurencji doskonałej, jest funkcja popytu na i -te dobro pośrednie:

$$C_t(i) = \left[\frac{P_t(i)}{P_t} \right]^{-\sigma} C_t \quad (4)$$

oraz indeks cen postaci:

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\sigma} di \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (5)$$

gdzie $P_t(i)$ – nominalna cena i -tego dobra pośredniego.

1.2. Firmy

Zakładamy, że na rynku dóbr pośrednich działa nieskończenie wiele firm, z których każda produkuje odmienny rodzaj dobra pośredniego. Produkcja i -tej firmy pośredniej jest opisana funkcją produkcji:

$$Y_t(i) = A_t L_t(i)^{1-\alpha}, \quad (6)$$

gdzie:

$$\alpha \in (0, 1),$$

$(1 - \alpha)$ – elastyczność produkcji względem pracy.

Zmienna egzogeniczna A_t oznacza postęp technologiczny. Zakładamy, że jest on opisany przez następujący stochastyczny proces autoregresji pierwszego rzędu¹⁰:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a, \quad \varepsilon_t^a \sim i.i.d. N(0, \sigma_a^2), \quad (7)$$

gdzie $a_t = \ln A_t$.

Rozwiązaniem zadania maksymalizacji zysku producenta i -tego dobra pośredniego jest reguła decyzyjna postaci:

$$\frac{W_t}{P_t(i)} = (1 - \alpha) A_t L_t(i)^{-\alpha}, \quad (8)$$

zgodnie z którą firma zatrudnia siłę roboczą, dopóki płaca realna nie przewyższa krańcowej wydajności pracy.

Jednym z kluczowych założeń modeli DSGE jest założenie o konkurencji monopolistycznej, które pozwala wprowadzić do modelu zróżnicowanie dóbr (*goods differentiation*) oraz inercję cen (*price rigidity*). Wszystkie firmy produkujące dobra pośrednie mogą ustalać ceny swoich produktów. Jednak w danym okresie tylko część $(1 - \theta) \cdot 100\%$ z tych firm może zmienić ceny, ponieważ dla pozostałej grupy firm $\theta \cdot 100\%$ pociąga to za sobą zbyt duże koszty ($\theta \in [0; 1]$). Taki rodzaj inercji cen jest zgodny ze schematem Calvo [Calvo 1983].

¹⁰ W literaturze DSGE przyjmuje się zazwyczaj, że zmienne egzogeniczne opisane są przez procesy autoregresji. Dla potrzeb symulacji stosuje się najczęściej autoregresję pierwszego rzędu. Przy estymacji modeli DSGE są używane procesy różnego typu: autoregresji z większą liczbą opóźnień, procesy MA (*moving average*), a także procesy ARMA w przypadku, gdy niektóre zmienne egzogeniczne są skorelowane, na przykład zmienne oznaczające postęp technologiczny dla gospodarki krajowej oraz dla gospodarki zagranicznej. Innowacje mają zawsze wartość oczekiwaną równą 0 i niezerową wariancję. Standardowo przyjmuje się również normalność rozkładu innowacji. Opisywanie zmiennych egzogenicznych za pomocą procesów stochastycznych jest podstawową cechą modeli stochastycznych, w których podmioty gospodarcze podejmują swoje decyzje bez znajomości wartości i dynamiki przyszłych zaburzeń, znając jedynie rozkład tych zakłóceń.

Reguła ustalania cen przez firmy pośrednie wynika z rozwiązywania ich zadań maksymalizacji strumienia oczekiwanych przyszłych zysków tych firm, z uwzględnieniem możliwości, że część z nich w niektórych okresach w przyszłości nie będzie mogło zmienić swoich cen. Reguła ma postać:

$$\frac{P_t^*}{P_{t-1}} = \mu \frac{E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left\{ Y_{t+k}^{1-\gamma} P_{t+k}^{\sigma-1} MC_{t+k|t} \Pi_{t-1, t+k} \right\}}{E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left\{ Y_{t+k}^{1-\gamma} P_{t+k}^{\sigma-1} \right\}}, \quad (9)$$

gdzie:

- P_t^* – cena optymalna,
- $MC_{t+k|t}$ – realny koszt marginalny w okresie $t + k$ dla firmy, która ostatnio zmieniała swoją cenę w okresie t ,
- $\Pi_{t-1, t+k}$ – stopa inflacji w ciągu k kolejnych okresów, począwszy od ostatniej zmiany ceny w okresie $t - 1$.

Współczynnik $\mu = \sigma/(\sigma - 1)$ można interpretować jako optymalny narzut na koszt marginalny w warunkach braku ograniczeń na częstość zmian cen.

1.3. Polityka monetarna

W modelu BNK (*basic New Keynesian model*) zakładamy, że władze monetarne ustalają poziom nominalnej stopy procentowej na podstawie reguły uwzględniającej inflację oraz lukę produkcyjną:

$$R_t = \frac{1}{\beta} \Pi_t^{\varphi_\pi} \tilde{Y}_t^{\varphi_y} e^{v_t}, \quad (10)$$

gdzie:

$$v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v, \quad \varepsilon_t^v \sim i.i.d. N(0, \sigma_v^2). \quad (11)$$

Tego typu regułę ustalania stopy procentowej nazywa się regułą Taylora [Taylor 1993]. Parametry φ_π i φ_y oznaczają miary wpływu stopy inflacji oraz luki produkcyjnej na stopę procentową. Ich wartości są przyjmowane przez władze monetarne.

Luka produkcyjna jest określona przez stosunek poziomu produkcji do jego poziomu Y_t^n , który występowałby przy cenach płynnych, nazywanego

również naturalnym poziomem produkcji, a który stanowi odniesienie dla polityki monetarnej:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{Y_t^n}. \quad (12)$$

1.4. Agregacja i równowaga ogólna

Warunki równowagi ogólnej uzyskujemy poprzez jednoczesne uwzględnienie reguł zachowań wszystkich podmiotów gospodarczych w formie warunków równowagi cząstkowej, a także reguł opisujących funkcjonowanie rynku. Część z nich przybiera formę makroekonomicznych warunków bilansowych, a w prezentowanym przez nas prostym modelu gospodarki zamkniętej sprowadzają się one do warunków równowagi podaży i popytu na produkty oraz popytu i podaży siły roboczej. W warunkach równowagi ogólnej posługujemy się zmiennymi zagregowanymi w skali całej gospodarki.

Dynamika zagregowanej ceny jest uzależniona od elastyczności substytucji pomiędzy dobrami, ceny optymalnej ustalonej w bieżącym okresie oraz od indeksu cen z przeszłego okresu. Równanie (5) przedstawia sytuację, gdy ceny są płynne (*flexible prices*). Uwzględniając inercję cen, dla zagregowanej ceny inflacja jest kształtowana następująco:

$$\Pi_t^{1-\sigma} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\sigma}. \quad (13)$$

Równowaga popytu i podaży na rynku produktów jest opisana równaniem:

$$Y_t(i) = C_t(i), \quad \forall i \in [0, 1], \quad (14)$$

a na poziomie zagregowanym, po uwzględnieniu agregacji konsumpcji oraz produktu zgodnej z równaniem (3), sprowadza się do:

$$Y_t = C_t. \quad (15)$$

Natomiast równowaga podaży i popytu na siłę roboczą dana jest w postaci:

$$L_t = \int_0^1 L_t(i) di, \quad (16)$$

co oznacza, że podaż siły roboczej w całej gospodarce równoważy popyt na pracę pochodzący ze wszystkich firm produkujących dobra pośrednie.

Korzystając z postaci funkcji produkcji (6) oraz warunków (4) i (14), relację między zmienną wyrażającą postęp technologiczny oraz poziomami zagregowanej produkcji i zagregowanej siły roboczej możemy w przybliżeniu przedstawić jako:

$$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha}. \quad (17)$$

Realny koszt krańcowy produkcji jest zdefiniowany jako stosunek płacy realnej oraz krańcowej wydajności pracy danej równaniem (8). Po uwzględnieniu zależności, w których występują zmienne zagregowane, średni realny koszt krańcowy kształtuje się następująco:

$$MC_t = \frac{W_t}{P_t} \cdot \frac{1}{1-\alpha} A_t^{-1} L_t^\alpha, \quad (18)$$

a jeśli skorzystamy z reguły decyzyjnej konsumentów (1) oraz postaci zagregowanego produktu (17), koszt krańcowy możemy wyrazić również jako:

$$MC_t = \frac{1}{1-\alpha} Y_t^{\gamma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}} A_t^{-\frac{1+\varphi}{1-\alpha}}. \quad (19)$$

Równanie (19), zastosowane do sytuacji, gdy ceny są płynne, pozwala określić relację pomiędzy naturalnym poziomem produktu a pozostałymi zmiennymi modelu:

$$MC = \frac{1}{1-\alpha} \left(Y_t^n \right)^{\gamma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}} A_t^{-\frac{1+\varphi}{1-\alpha}}, \quad (20)$$

gdzie $MC = 1/\mu$.

Powyższa definicja równowagi ogólnej w gospodarce pozwala na sformułowanie układu równań prezentującego cały model w postaci strukturalnej. Do warunków równowagi ogólnej wynikających z zadań optymalizacyjnych podmiotów, agregacji oraz warunków funkcjonowania rynków dołączamy regułę stopy procentowej oraz definicję stopy inflacji. Model w postaci strukturalnej przedstawiamy w tabeli 1.

Tabela 1. Podsumowanie modelu BNK

Reguła ustalania cen	$\frac{P_t^*}{P_{t-1}} = \mu \frac{E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left\{ Y_{t+k}^{1-\gamma} P_{t+k}^{\sigma-1} MC_{t+k t} \Pi_{t-1 t+k} \right\}}{E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left\{ Y_{t+k}^{1-\gamma} P_{t+k}^{\sigma-1} \right\}} \quad (21)$
Dynamika zagregowanej ceny	$\Pi_t^{1-\sigma} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\sigma} \quad (22)$
Reguła decyzyjna gospodarstw domowych	$\frac{1}{R_t} = \beta E_t \left[\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right)^{-\gamma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \quad (23)$
Realny koszt krańcowy	$MC_t = \frac{1}{1-\alpha} Y_t^{\gamma+\frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}} A_t^{-\frac{1+\varphi}{1-\alpha}} \quad (24)$
Reguła stopy procentowej	$R_t = \frac{1}{\beta} \Pi_t^{\varphi\pi} \tilde{Y}_t^{\varphi\gamma} e^{\nu_t} \quad (25)$
Luka produkcyjna	$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{Y_t^n} \quad (26)$
Naturalny poziom produktu	$MC = \frac{1}{1-\alpha} \left(Y_t^n \right)^{\gamma+\frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}} A_t^{-\frac{1+\varphi}{1-\alpha}} \quad (27)$
Stopa inflacji	$\Pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (28)$

Źródło: Obliczenia własne.

2. Rozwiązanie układu równań modelu BNK

Rozwiązanie układu równań prezentowanego modelu polega na sprowadzeniu go do takiej postaci, w której każda zmienna endogeniczna w okresie t jest wyrażona jako funkcja zmiennych egzogenicznych oraz opóźnionych wartości zmiennych endogenicznych¹¹. W takim przedstawieniu układu

¹¹ W dalszej części artykułu będziemy używać również określenia „rozwiązanie modelu” jako swego rodzaju skrót myślowy, rozumiejąc przez nie rozwiązanie układu równań modelu.

równań modelu, nazywanym postacią zredukowaną, związki między zmiennymi mają mniej złożony charakter niż w postaci strukturalnej. Rozwiązanie modelu jest otrzymywane za pomocą metod numerycznych, a postaci zredukowanej zazwyczaj jawnie się nie specyfikuje. Procedury obliczeniowe są przeprowadzane w wybranych programach komputerowych¹². Warto jednak na przykładzie prostego modelu poznać ideę oraz sposoby rozwiązywania modeli DSGE. Cenne jest również zrozumienie, do czego są wykorzystywane kolejne postaci modelu oraz jakie własności modelu można na ich podstawie określić.

Prezentowany przez nas prosty model nowej szkoły keynesowskiej posłuży nam do objaśnienia wybranej metody rozwiązywania modeli DSGE, to jest metody Blancharda-Kahna. Naszym celem jest nie tyle wyczerpujące opisanie metody, wraz ze wszystkimi jej niuansami, zaletami oraz wadami, ile raczej zaprezentowanie, jak jest ona bezpośrednio implementowana w przypadku prostego modelu BNK, a przez to przybliżenie idei rozwiązywania modeli DSGE.

Procedury rozwiązywania modeli DSGE można podzielić na dwie szerokie klasy¹³. Jedną stanowią metody perturbacyjne, do których należy metoda Blancharda-Kahna. Druga klasa metod to techniki projekcyjne, które mają krótszą tradycję¹⁴. Metody perturbacyjne mają tę zaletę, że są stosunkowo mało wymagające pod względem ilości oraz stopnia złożoności obliczeń. Nadają się więc dla skomplikowanych modeli, z dużą liczbą równań oraz zmiennych antycypacyjnych. Wykorzystują lokalne przybliżenie równań modelu na podstawie rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu stanu ustalonego (*steady state*). Zatem ich stosowanie jest uzasadnione tylko wówczas, gdy wartości zmiennych modelu znajdują się w pobliżu swoich wartości w stanie ustalonym. Dlatego nie można rozważać zbyt dużych odchyłeń zmiennych od stanu ustalonego, czyli wprowadzać do modelu zbyt silnych zaburzeń.

W dalszej części artykułu pokażemy, jak zastosować wybraną metodę rozwiązywania modeli DSGE do konkretnego przykładu modelu, to jest podstawowego modelu nowej szkoły keynesowskiej. Przedstawimy kolejne kroki obliczeń niezbędne do skorzystania z tej procedury.

¹² Do najczęściej stosowanych programów komputerowych do rozwiązywania modeli DSGE należą MATLAB oraz DYNARE, wykorzystujący kod źródłowy MATLABA.

¹³ Szerzej o różnych metodach rozwiązywania dynamicznych modeli równowagi w [Aruoba, Fernández-Villaverde i Rubio-Ramirez 2006].

¹⁴ Szerokie omówienie metod projekcyjnych wraz z ich implementacją znaleźć można m. in. w pracy [Lim i McNelis 2008].

2.1. Stan ustalony

Ponieważ metoda Blancharda-Kahna opiera się na liniowo-logarytmicznej aproksymacji równań modelu, potrzebne jest przekształcenie układu równań modelu do postaci liniowej za pomocą log-linearyzacji. W wyniku tego przybliżenia wszystkie zmienne modelu zostają wyrażone w postaci procentowych odchyłeń od swoich wartości w stanie ustalonym (*steady state*)¹⁵. Dlatego też pierwszy etap implementacji procedury obliczeniowej, jaką jest metoda Blancharda-Kahna, sprowadza się do wyznaczenia stanu ustalonego.

Wyznaczenie stanu ustalonego dla zmiennych modelu polega na określeniu rozwiązania statycznego równoważnego z deterministyczną równowagą długookresową. Zanikają wszelkie źródła nierównowagi w sali mikro oraz makro. Wszystkie podmioty gospodarcze osiągają swoje optimum. Zanikają też podstawy do arbitrażu. Ceny są płynne (*flexible prices*). Wszystkie szoki z przeszłości zostały zaabsorbowane, a stacjonarne zaburzenia stochastyczne nie mają wpływu na wartości zmiennych egzogenicznych. Podsumowując, zmienne modelu nie mają tendencji do zmiany swoich wartości.

Wyznaczenie wartości zmiennych w stanie ustalonym również można przeprowadzić za pomocą metod numerycznych, zwłaszcza w przypadku bardziej złożonych modeli lub modeli dużej skali. Rozpatrywany przez nas

Tabela 2. Stan ustalony modelu BNK

Poziom inflacji	$\Pi = 1$	(29)
Średni koszt krańcowy	$MC = \frac{1}{\mu} = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$	(30)
Zagregowany produkt	$Y = \left(\frac{1 - \alpha}{\mu} \right)^{\frac{1 - \alpha}{\gamma(1 - \alpha) + \varphi + \alpha}}$	(31)
Naturalny poziom produktu	$Y^n = Y$	(32)
Luka produkcyjna	$\tilde{Y} = 1$	(33)
Nominalna stopa procentowa	$R = \frac{1}{\beta}$	(34)

Źródło: Obliczenia własne.

¹⁵ Definicję stanu ustalonego, nazywanego również równowagą typu *steady state*, podajemy za [Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk 2007].

model jest stosunkowo prosty, więc stan ustalony można wyznaczyć analitycznie. Zakładamy jedynie, że poziom stopy inflacji w stanie ustalonym wynosi 1, co oznacza że ceny są stałe. Wówczas możemy obliczyć także wartości wszystkich pozostałych zmiennych endogenicznych. Przedstawiamy je w tabeli 2.

Bez straty ogólności możemy założyć, że indeks cen $P = 1$. Wówczas wartości wszystkich zmiennych w stanie ustalonym zdeterminowane są przez wartości parametrów α , β , γ , φ oraz σ .

2.2. Log-linearyzacja

Jak wspominaliśmy, log-linearyzacja jest niezbędnym etapem obliczeń, który jest wykorzystywany między innymi w metodzie Blancharda-Kahna. W każdej metodzie perturbacyjnej, przed rozwiązaniem układu równań modelu, dowolne równanie rozwija się w szereg Taylora wokół punktu stanu ustalonego. W metodach perturbacyjnych pierwszego rzędu stosuje się linearyzację lub log-linearyzację¹⁶. Zatem układ równań modelu DSGE, który w swojej wyjściowej postaci strukturalnej jest zazwyczaj nieliniowy, zostaje przekształcony w układ liniowy. Taki układ łatwiej poddawany jest kolejnym przekształceniom.

Dodatkową zaletą log-linearyzacji są możliwości interpretacji równań uzyskanych po zastosowaniu tej metody. Zamiast zmiennych posługujemy się procentowymi odchyleniami zmiennych od ich wartości w stanie ustalonym. W takiej log-liniowej postaci modelu łatwiej jest interpretować wzajemne powiązanie zmiennych, uzależnienie ich wartości od wartości parametrów oraz wpływ parametrów na dynamikę zmiennych.

Podstawą log-linearyzacji jest wyrażanie wszystkich równań modelu z wykorzystaniem log-liniowych odpowiedników zmiennych:

$$x_t = \ln X_t - \ln X, \quad (35)$$

gdzie:

X_t – poziom zmiennej,

X – jej wartość w stanie ustalonym,

x_t – odchylenie zmiennej od wartości w stanie ustalonym.

¹⁶ Metoda log-linearyzacji została szeroko omówiona m.in. w pracy [Uhlig 1999]. Warto też polecić zwięzłe, a zarazem wyczerpujące omówienie tej metody, z licznymi przykładami, przedstawione w artykule [Zietz 2008].

Wyrażenie (35) można również przedstawić w postaci:

$$x_t = \ln \left(1 + \frac{X_t - X}{X} \right).$$

Używając tej postaci oraz aproksymacji pierwszego rzędu z rozwinięcia Taylora w otoczeniu punktu stanu ustalonego $X_t = X$, odchylenie wyrażone za pomocą definicji (35) można też przedstawić jako:

$$x_t \approx \frac{X_t - X}{X}, \quad (36)$$

co pokazuje, że jest ono bliskie odchyleniu procentowemu.

Układ równań (21)–(28) po log-linearyzacji można przedstawić w postaci podanej w tabeli 3. Uwzględnia ona wszystkie reguły decyzyjne wszystkich podmiotów gospodarczych występujących w modelu, reguły funkcjonowania rynku oraz regułę stopy procentowej ustalonej przez władze monetarne¹⁷.

Tabela 3. Podsumowanie modelu BNK w postaci log-liniowej

Nowa keynesowska krzywa Phillipsa ^a	$\pi_t = \beta E_t \{\pi_{t+1}\} + \kappa \tilde{y}_t$	(37)
Dynamiczne równanie IS	$\tilde{y}_t = -\frac{1}{\gamma} (i_t - E_t \{\pi_{t+1}\} - r_t^n) + E_t \{\tilde{y}_{t+1}\}$	(38)
Reguła stopy procentowej	$i_t = \rho + \varphi_\pi \pi_t + \varphi_y \tilde{y}_t + v_t$	(39)

^a Objasnienie pojęcia nowej keynesowskiej krzywej Phillipsa (*new Keynesian Phillips curve*, NKPC) można odnaleźć m. in. w [Gali 2008]. Natomiast szczegółowe wyprowadzenie jej postaci z zasad log-linearyzacji można znaleźć w [Sobczak 2013].

Źródło: Obliczenia własne.

W postaci log-liniowej modelu BNK mamy trzy zmienne endogeniczne, spośród których dwie, π_t oraz $\tilde{y}_t$, to zmienne antycypacyjne. Dwie zmienne, r_t^n oraz v_t , to zmienne egzogeniczne. Do modelu wprowadziliśmy nową zmienną r_t^n , oznaczającą naturalny poziom stopy procentowej, to znaczy taki jej poziom, który ustaliłyby władze monetarne, gdyby ceny były płynne. Kształtuje się on następująco:

¹⁷ Liczba równań modelu redukuje się z ośmiu do trzech, ponieważ na etapie log-linearyzacji omawianego przez nas prostego modelu nowej szkoły keynesowskiej dokonujemy m. in. przekształceń, które pozwalają część równań uwzględnić w pozostałych równaniach modelu.

$$r_t^n = \rho + \gamma E_t \{y_{t+1}^n - y_t^n\}. \quad (40)$$

Wykorzystując równanie średniego realnego kosztu krańcowego oraz równanie określające jego wartość przy cenach płynnych, warunek (40) możemy zapisać w postaci:

$$r_t^n = \rho - \gamma \psi_{ya}^n (1 - \rho_a) a_t, \quad (41)$$

gdzie $\psi_{ya}^n = (1 + \varphi) / (\gamma(1 - \alpha) + \varphi + \alpha)$.

Dynamiczne równanie IS (38) (*dynamic investment/saving*, DIS) opisuje relację pomiędzy wielkością zagregowanego produktu a określoną *ex ante* realną stopą procentową $r_t = i_t - E_t \{\pi_{t+1}\}$

Nową keynesowską krzywą Phillipsa (37) (*New Keynesian Phillips Curve*, NKPC) można również przedstawić w postaci:

$$\pi_t = \beta E_t \{\pi_{t+1}\} + \lambda mc_t, \quad (42)$$

gdzie $\lambda = (1 - \theta)(1 - \beta\theta)\Theta / \theta$ oraz $\Theta = (1 - \alpha) / (1 - \alpha + \alpha\sigma)$. Parametr λ jest miarą wrażliwości stopy inflacji na zmiany w poziomie realnego kosztu krańcowego. W równaniu (37) wprowadzamy parametr $\kappa = \lambda(\gamma + (\varphi + \alpha) / (1 - \alpha))$.

Zgodnie z krzywą Phillipsa wzrost aktywności gospodarczej, skutkujący wyższym poziomem produkcji, pociąga za sobą zwiększenie liczby godzin pracy, a przez to podwyższenie płac oraz wyższe koszty krańcowe dla producentów dóbr pośrednich. Reakcją firm, które mogą zmienić ceny swoich produktów, jest podwyższenie tych cen. Zatem poziom zagregowanej ceny w gospodarce wzrasta, przez co wzrasta również stopa inflacji. Tym samym odchylenia kosztu krańcowego od jego poziomu średniego są miarą napięć na rynku pracy.

Reguła stopy procentowej po log-linearyzacji przyjmuje postać (39), gdzie $i_t \approx \ln(1 + i_t) = \ln R_t$ oznacza nominalną stopę procentową, a parametr $\rho = -\ln\beta$.

Log-linearyzacja to jeden z etapów przekształceń przeprowadzany w metodzie Blancharda-Kahna, niezbędny z punktu widzenia dalszych obliczeń. Jednak jawna specyfikacja przekształconego liniowego układu równań modelu, takiego jak ten, który został zaprezentowany w tabeli 3, nie jest wymagana. Warto jednak zauważyć, że równania modelu BNK w postaci log-liniowej pozwalają na łatwiejszą interpretację zależności pomiędzy zmiennymi oraz określenie wpływu wartości parametrów na dynamikę zmiennych. Po drugie, postać ta jest nam potrzebna do objaśnienia istoty wybranej metody rozwiązywania modeli DSGE, którą przedstawimy w kolejnym punkcie.

2.3. Metoda Blancharda-Kahna

Model zaprezentowany w tabeli 3 ma tyle samo równań co zmiennych decyzyjnych. To znaczy, że dany jest w postaci zamkniętej. Jest to warunek konieczny istnienia rozwiązania układu równań modelu. Rozwiązanie modelu DSGE polega na sprowadzeniu go do postaci zredukowanej, w której każda zmienna endogeniczna jest funkcją zmiennych egzogenicznych oraz opóźnionych wartości zmiennych endogenicznych. Jednak zamknięta postać modelu nie gwarantuje, że układ równań modelu posiada rozwiązanie, ani że jest ono stabilne¹⁸.

Aby sprowadzić model do postaci zredukowanej, posłużymy się jedną z dostępnych metod rozwiązywania modeli DSGE, to jest metodą Blancharda-Kahna [Blanchard i Kahn 1980]¹⁹. Jest to jedna z pierwszych technik proponowana do rozwiązywania liniowych modeli racjonalnych oczekiwań²⁰. Wykorzystuje ona log-liniowe przybliżenie warunków optymalności wynikających z wyjściowych problemów optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych występujących w modelu.

Metoda Blancharda-Kahna opiera się na rachunku macierzowym, a jej istota sprowadza się do określenia własności wartości własnych pewnych macierzy układu równań modelu DSGE przedstawionego w postaci zredukowanej. Z kolei problem określenia wartości własnych przekłada się na problem wartości parametrów strukturalnych modelu lub wartości kombinacji tych parametrów. Na tej podstawie można stwierdzić, czy rozwiązanie modelu istnieje, a jeśli tak, to czy jest ono jednoznacznie określone oraz lokalnie stabilne.

Mając układ równań modelu BNK w postaci liniowej (37)–(39) danej w tabeli 3, możemy go następnie przedstawić w postaci równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \mathbf{B}_T \begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_T (\hat{r}_t^n - v_t), \quad (43)$$

gdzie: $\hat{r}_t^n = r_t^n - \rho$

¹⁸ O istnieniu i stabilności rozwiązania układu równań w modelach racjonalnych oczekiwań pisze m.in. Wallusch [2013].

¹⁹ Wybór tej konkretnej metody podyktowany jest m.in. jej bezpośrednią implementacją w oprogramowaniu DYNARE, w którym stosuje się również inne metody. Metoda Blancharda-Kahna jest domyślną metodą stosowaną w tym oprogramowaniu.

²⁰ Wyczerpujące objaśnienie metody znaleźć można m.in. w artykule [Sims 2002], a także w pracy [McCandless 2008].

oraz:

$$\mathbf{B}_T = \Omega \begin{bmatrix} \gamma & 1 - \beta \varphi_\pi \\ \gamma \kappa & \kappa + \beta(\gamma + \varphi_y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_T = \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (44)$$

a parametr $\Omega = 1/(\gamma + \varphi_y + \kappa \varphi_\pi)$. Aby bezpośrednio zastosować metodę Blancharda-Kahna, model BNK w postaci równania (43) zapisujemy następująco²¹:

$$\begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_T \begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_T \mathbf{G}_T (v_t - \hat{r}_t^n), \quad (45)$$

gdzie:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{B}_T^{-1} = \frac{1}{\gamma \beta} \begin{bmatrix} \kappa + \beta(\gamma + \varphi_y) & \beta \varphi_\pi - 1 \\ -\gamma \kappa & \gamma \end{bmatrix}. \quad (46)$$

W przypadku osobliwości macierzy $\mathbf{B}_T$ (kiedy nie istnieje odwrotność tej macierzy) stosuje się dekompozycję macierzy za pomocą uogólnionej metody Schura. W kolejnych krokach obliczeń dokonuje się przekształceń macierzy $\mathbf{Z}_T$, które polegają m.in. na jej dekompozycji na macierze zawierające jej odpowiednie wartości własne lub wektory własne, a następnie na uporządkowaniu elementów macierzy oraz oddzieleniu stabilnych i niestabilnych wartości własnych. Pozwala to określić związek ilości niestabilnych wartości własnych macierzy $\mathbf{Z}_T$ z liczbą zmiennych antycypacyjnych.

Zgodnie z warunkiem Blancharda-Kahna (istnienia lokalnie stabilnego i jednoznacznie określonego rozwiązania układu równań modelu danego w postaci (45)) macierz $\mathbf{Z}_T$ musi mieć dokładnie tyle wartości własnych większych co do modułu od 1, ile zmiennych antycypacyjnych występuje w modelu. W modelu BNK mamy dwie zmienne endogeniczne, które nie są ustalone z góry. Dlatego należy określić, przy jakich wartościach parametrów tworzących elementy macierzy $\mathbf{Z}_T$ ma ona dokładnie dwie wartości własne na zewnątrz koła jednostkowego. W tym celu zapiszmy wielomian charakterystyczny tej macierzy:

²¹ W przypadku ogólnym, aby móc zastosować metodę Blancharda-Kahna, należy wyodrębnić wektor zmiennych endogenicznych ustalonych z góry (*predetermined*), wektor zmiennych endogenicznych antycypacyjnych (*non-predetermined*) oraz wektor zmiennych egzogenicznych. W modelu BNK danym równaniem (45) możemy wyróżnić cztery zmienne, z których dwie to zmienne egzogeniczne, a pozostałe dwie są zmiennymi endogenicznymi, które nie są ustalone z góry.

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\kappa + \beta(\gamma + \varphi_\gamma)}{\gamma\beta} - \lambda & \frac{\beta\varphi_\pi - 1}{\gamma\beta} \\ -\frac{\gamma\kappa}{\gamma\beta} & \frac{\gamma}{\gamma\beta} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Ma on te same pierwiastki co następujący wielomian:

$$w(\lambda) = [\kappa + \beta(\gamma + \varphi_\gamma) - \gamma\beta\lambda](1 - \beta\lambda) + \kappa(\beta\varphi_\pi - 1), \quad (48)$$

a ich wyznaczenie jest równoważne znalezieniu pierwiastków wielomianu:

$$p(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (49)$$

gdzie:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = \frac{-(\gamma + \kappa + \beta(\gamma + \varphi_\gamma))}{\gamma\beta}, \quad a_0 = \frac{\gamma + \varphi_\gamma + \kappa\varphi_\pi}{\gamma\beta}. \quad (50)$$

Korzystając z kryterium Schura-Cohna²², otrzymujemy warunki konieczne istnienia dwóch pierwiastków wielomianu (49) większych co do wartości bezwzględnej od 1:

$$|a_0| > 1, \quad (51)$$

$$|a_1| < 1 + a_0. \quad (52)$$

Z nierówności (51) wynika, że:

$$\varphi_\gamma + \kappa\varphi_\pi > -(1 - \beta)\gamma, \quad (53)$$

co jest zawsze spełnione, gdyż $\beta \in (0; 1)$.

Natomiast z nierówności (52) dostajemy warunek:

$$\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_\gamma > 0. \quad (54)$$

²² Sformułowanie twierdzenia Schura-Cohna znajduje się m.in. w pracy [LaSalle 1986].

Problem istnienia lokalnie stabilnego i jednoznacznie określonego rozwiązania modelu BNK sprowadza się więc do wyznaczenia zależności pomiędzy wartościami parametrów²³, opisanej nierównością (54). Zauważmy, że dwa parametry znajdujące się w tej nierówności to parametry, których wartości są kontrolowane przez władze monetarne ustalające postać reguły stopy procentowej (39) w prowadzonej przez siebie polityce monetarnej. Przypomnijmy, że parametry φ_π i φ_y oznaczają miary wpływu stopy inflacji oraz luki produkcyjnej na stopę procentową. Zatem władze monetarne powinny odpowiednio reagować na odchylenia stopy inflacji oraz poziomu luki inflacyjnej od ich wartości referencyjnych, określonych jako cele polityki monetarnej, poprzez odpowiednio silną kontrolę parametrów φ_π i φ_y w przyjętej przez siebie regule stopy procentowej. W przypadku permanentnego wzrostu inflacji oznacza to takie zwiększenie wartości wspomnianych parametrów, aby doprowadzić do wzrostu realnej stopy procentowej, przeciwdziałając w ten sposób dalszemu wzrostowi inflacji.

Podsumowanie

W artykule przedstawiliśmy metodę Blancharda-Kahna rozwiązywania układu równań modeli DSGE na przykładzie prostego modelu nowej szkoły keynesowskiej. Naszym celem było wyjaśnienie podstaw tej metody. Prześledziliśmy wszystkie etapy pracy z modelem DSGE, poczynając od sformułowania założeń o zachowaniu podmiotów gospodarczych, poprzez sformułowanie warunków równowagi ogólnej, kończąc na zaprezentowaniu idei zastosowanej metody.

W literaturze, także polskiej, brak jest pozycji, które w przystępny, a zarazem wyczerpujący sposób wprowadzałyby do metodologii modeli DSGE. Na ogół trzeba posiłkować się wiadomościami pochodzącymi z wielu różnych źródeł, co utrudnia prześledzenie całego toku rozumowania, który doprowadza do uzyskania rozwiązania modelu DSGE. Natomiast bezpośrednia implementacja danej metody w oprogramowaniu komputerowym, bez zrozumienia jej podstaw, nie powinna być celem samym w sobie.

²³ W przypadku bardziej złożonych modeli problem wartości własnych macierzy układu równań modelu również przekłada się na problem odpowiednich wartości parametrów. Jednak wówczas warunek Blancharda-Kahna może przybrać znacznie bardziej skomplikowaną postać, na ogół nieotrzymywaną za pomocą metod analitycznych, lecz uzyskiwaną numerycznie w stosowanym oprogramowaniu i przez to niespecyfikowaną jawnie.

Warto zauważyć, że zastosowanie metody Blancharda-Kahna nie tylko pozwala uzyskać rozwiązanie modelu BNK, ale również określić jego własności oraz przedstawić wstępne rekomendacje dla zachowania się podmiotów decyzyjnych, na przykład władz monetarnych. Uzyskany przez nas warunek Blancharda-Kahna określa, jak silna powinna być reakcja polityki monetarnej na odchylenia stopy inflacji oraz poziomu luki produkcyjnej od pewnych założonych wartości referencyjnych.

Rozwiązanie układu równań modelu pozwala na dalsze jego wykorzystanie. Dla celów analizy teoretycznej można badać funkcje reakcji zmiennych modelu na impuls w postaci zaburzenia egzogenicznego. Z kolei analiza empiryczna pozwala na dopasowanie modelu dla danych rzeczywistej gospodarki oraz formułowanie na tej podstawie prognoz i rekomendacji dla polityki gospodarczej. Warto zaproponować obszernie omówienie wszystkich etapów pracy z modelami DSGE, aby wyczerpująco wyjaśnić podstawy stosowanych metod, ich ograniczenia oraz możliwości. W tym artykule przedstawiliśmy, jak przygotować model DSGE dla celów analizy teoretycznej, korzystając z metody Blancharda-Kahna rozwiązywania liniowych modeli racjonalnych oczekiwań²⁴. Opracowania wyjaśniające kolejne etapy pracy, z przykładami prostych modeli DSGE, opisem metod i zastosowaniami, pozwolą na lepsze wykorzystanie tych modeli oraz dalszy rozwój ich metodologii.

Bibliografia

- Aruoba, S.B., Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramirez, J.F., 2006, *Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies*, Journal of economic Dynamics and Control, vol. 30, s. 2477–2508.
- Baranowski, P., Gałęcka-Burdziak, E., Górajski, M., Malaczewski M., Szafranski, G., 2013, *Inflacja a mechanizmy aktualizacji cen. Studium dla Polski*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Blanchard, O., Kahn, C.M., 1980, *The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations*, Econometrica, vol. 48, s. 1305–1313.
- Calvo, G.A., 1983, *Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework*, Journal of Monetary Economics, vol. 12, no. 3, s. 383–98.
- Dixit, A.K., Stiglitz, J.E., 1977, *Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity*, American Economic Review, vol. 67, no. 3, s. 297–308.

²⁴ Opis kolejnych etapów pracy z modelami DSGE można znaleźć między innymi w pierwszym rozdziale pracy doktorskiej [Sobczak 2013].

- Gali, J., 2008, *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle. An introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press, Princeton.
- Grabek, G., Kłos, B., Utzig-Lenarczyk, G., 2007, *SOE-PL — Model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na danych polskich. Metodologia, specyfikacja, wyniki estymacji i pierwsze zastosowania*, Materiały i Studia NBP, vol. 217.
- Kuchta, Z., Piłat, K., 2010, *Zastosowanie modelu realnego cyklu koniunkturalnego Hansena do gospodarki Polski*, *Gospodarka Narodowa*, vol. 21, s. 19–39.
- LaSalle, J.P., 1986, *The Stability and Control of Discrete Processes*, Applied Mathematical Sciences, vol. 62, Springer-Verlag, New York.
- Lim, G.C., McNelis, P.D., 2008, *Computational Macroeconomics for the Open Economy*, The MIT Press, Massachusetts.
- Mancini Griffoli, T., 2007–2008, *DYNARE User Guide: An Introduction to the Solution & Estimation of DSGE Models*, <http://www.dynare.org/documentation-and-support/user-guide/Dynare-UserGuide-WebBeta.pdf/view>.
- McCandless, G.T., 2008, *The ABCs of RBCs. An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press, Harvard.
- Romer, D., 2014, *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Sims, C.A., 2002, *Solving Linear Rational Expectations Models*, *Computational Economics*, Society for Computational Economics, vol. 20, no. 1–2, s. 1–20.
- Sobczak, K., 2013, *Effect of Nominal Convergence on Real Side of Economy in DSGE Models*, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Université de Rennes 1, Poznań.
- Taylor, J.B., 1993, *Discretion versus Policy Rules in Practice*, Carnegie-Rochester Conferences Series on Public Policy, vol. 39, December, s. 195–214.
- Uhlig, H., 1999, *A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily*, w: Marimon, R., Scott, A. (eds.), *Computational Methods for the Study of Dynamic Economics*, Oxford University Press, Oxford.
- Wallusch J., 2013, *Patrząc na Słońce. Nieokreśloność równowagi a polska dezinflacja 1994–2011*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Zietz, J., 2008, *A Clarifying Note on Converting to Log-deviations from the Steady State*, *Economics Bulletin*, Access Econ, vol. 3, no. 50, s. 1–15.