

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki
Elektronicznej, Katedra Badań Operacyjnych
k.piasecki@ue.poznan.pl

WARTOŚĆ BIEŻĄCA A PIERWSZE PRAWO GOSSENA – STUDIUM PRZYPADKU¹

Streszczenie: Głównym celem artykułu jest sprawdzenie istnienia ekonomicznie uzasadnionej nieaddytywnej funkcji wartości bieżącej. Badanie to przeprowadzono przy założeniu zachodzenia prawa malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Rozważano dwa przypadki stałego współczynnika awersji do ryzyka. Brano tutaj pod uwagę współczynnik absolutny i współczynnik względny. W wyniku tych badań uzyskano dwa różne modele funkcji dyskontującej. Wykazano formalny wpływ behawioralnych czynników na dyskonto.

Słowa kluczowe: wartość bieżąca, awersja do ryzyka, czynnik dyskontujący, addytywność wartości bieżącej.

Klasyfikacja JEL: C02, C65, G02, G10.

PRESENT VALUE AND GOSSEN'S FIRST LAW – A CASE STUDY

Abstract: The main aim of this study was to verify the existence of an economically justified non-additive present value function. The study assumed the validity of the principle of the diminishing marginal utility of wealth. Two types of constant risk aversion coefficients were considered: the absolute coefficient and the relative coefficient. As a result, two different models for discounting functions were obtained. The formal influence of behavioural factors on the discount rate has been demonstrated.

Keywords: present value, risk aversion, discount factor, present value additivity.

¹ Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2012/05/B/HS4/03543.

Wstęp

Wartość teraźniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie czasu nazywamy wartością bieżącą (w skrócie PV) tej płatności. Wartość PV jest jednym z podstawowych narzędzi arytmetyki finansowej służących do dynamicznej oceny wartości pieniądza. Punktem wyjścia do rozwoju arytmetyki finansowej była teoria procentu opisana na przykład w [Chrzan 2001]. Dalszy rozwój teoretycznych podstaw arytmetyki finansowej zaowocował sformułowaniem przez Peccatiego [1972] aksjomatycznych podstaw arytmetyki finansowej. To aksjomatyczne podejście pozwoliło na usystematyzowanie i uproszczenie zbioru procedur obliczeniowych arytmetyki finansowej. W polskim piśmiennictwie naukowym aktualny stan wiedzy na ten temat przedstawiony jest w pracach: [Piasecki 2005, 2007; Piasecki i Ronka-Chmielowiec 2011]. W uniwersalnym piśmiennictwie naukowym analogiczną wiedzę zebrano w [Janssen, Manca i Volpe di Prignano 2009].

Postępowanie takie nie wyjaśniło jednak zjawiska wzrastania wartości pieniądza. Wyjaśnienie takie uzyskano wykazując, że PV dowolnej płatności jest identyczna z użytecznością strumienia finansowego reprezentującego tę płatność [Piasecki 2012]. Stwierdzenie to w pełni wyjaśnia istotę pojęcia PV. Dzięki temu przy dynamicznej ocenie wartości pieniądza dodatkowo można wykorzystać pierwsze prawo Gossena informujące o malejącej marginalnej użyteczności bogactwa.

Dla ustalonej wartości płatności pojęcie PV redukuje się do pojęcia użyteczności zdyskontowanej rozważanego przez wielu badaczy. Wielowątkowe wyniki badań poświęconych użyteczności czasowej zostały kompetentnie omówione w [Doyle 2013]². Wskazano tam między innymi na fakt, że wszystkie omawiane modele dyskontowania można przedstawić jako iloczyn wartości dyskontowanej płatności i czynnika dyskontującego zależnego jedynie od terminu odroczenia płatności. Oznacza to, że w modelach tych pominięto problem zależności PV od interakcji wartości i terminu odroczenia płatności. Określenie PV, jako liniowej funkcji wartości płatności, wykluczyło też możliwość ujawnienia się efektu oddziaływania pierwszego prawa Gossena. Dodatkowo w tej sytuacji dowolną PV można było traktować jako addytywną funkcję wartości płatności, co odpowiadało jednemu z warunków definicji

² W [Bleichrodt i in. 2013] skrytykowano niektóre ze sformułowanych w [Doyle 2013] ocen metod dyskonta. Nie podważono tam jednak poprawności żadnego z opisanych czynników dyskontujących. Tym samym wspomniana krytyka nie ma żadnego wpływu na poprawność naszego dalszego rozumowania.

Peccatiego [1972]. W ogólnym przypadku każde z tych zastrzeżeń jest jednak sprzeczne z praktyką finansów.

Głównym celem tej pracy jest wykazanie, że istnieją funkcje PV takie, że są spełnione warunki:

- przebieg zmienności PV jest w pełni uzasadniony przesłankami ekonomicznymi,
- PV nie jest addytywną funkcją wartości płatności,
- PV spełnia warunek określony przez pierwsze prawo Gossena.

1. Wartość bieżąca – ujęcie aksjomatyczne

Każdy dostępny w określonym momencie czasu płatność możemy opisać jako strumień finansowy.

Niech będzie dany zbiór momentów czasowych, $\{0\} \subset \Theta \subseteq \mathbb{R}_0^+$. W szczególnym przypadku może to być zbiór momentów kapitalizacji lub nieujemna półprosta czasu. Każdy strumień finansowy jest opisany przez parę $(t, C) \in \Phi = \Theta \times \mathbb{R}$, gdzie $t \in \Theta$ oznacza moment przepływu strumienia, natomiast $C \in \mathbb{R}$ opisuje wartość nominalną tego przepływu. Zbiór Φ nazywamy zbiorem płatności. Dodatkowo za pomocą symbolu $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}^+$ oznaczamy zbiór wszystkich należności. Peccati [1972] zdefiniował PV jako dowolną funkcję spełniającą warunki:

$$\forall_{C \in \mathbb{R}} : PV(0, C) = C, \quad (1)$$

$$\forall_{(t_1, C), (t_2, C) \in \Phi^+} : t_1 > t_2 \Rightarrow PV(t_1, C) < PV(t_2, C), \quad (2)$$

$$\forall_{(t, C_1), (t, C_2) \in \Phi} : PV(t, C_1 + C_2) = PV(t, C_1) + PV(t, C_2). \quad (3)$$

Każdą PV spełniającą warunki (1), (2) i (3) można przedstawić przy pomocy tożsamości

$$PV(t, C) = C \cdot v(t), \quad (4)$$

gdzie czynnik dyskontujący $v : \Theta \rightarrow [0; 1]$ jest malejącą funkcją spełniającą dodatkowo warunek

$$v(0) = 1. \quad (5)$$

Z drugiej strony każda funkcja PV postaci (4) spełnia warunki (1), (2) i (3). Wszystko to oznacza, że dowolna PV wyznaczona z zastosowaniem użyteczności zdyskontowanej [Doyle 2013] spełnia warunki definicji Peccatiego.

W [Piasecki 2012] wykazano, że przy określonych warunkach brzegowych użyteczność strumienia finansowego jest równa jego PV. Pozwoliło to na zdefiniowanie PV jako dowolnej funkcji spełniającej warunki (1), (2) i

$$\forall_{(t, C_1), (t, C_2) \in \Phi} : C_1 > C_2 \Rightarrow PV(t, C_1) > PV(t, C_2), \quad (6)$$

$$\forall_{(t, C) \in \Phi} : PV(t, -C) = -PV(t, C). \quad (7)$$

Powyższa definicja PV jest uogólnieniem definicji Peccatiego. Zauważmy, że dzięki (7) mamy

$$\forall_{t \in \Theta} : PV(t, 0) = 0. \quad (8)$$

Wszystkie nasze dalsze rozważania poświęcimy PV zdefiniowanej jako funkcji spełniającej warunki (1), (2), (6) i (7). Kluczowym problemem jest tutaj odpowiedź na pytanie, czy istnieją takie PV, które nie spełniają warunku (3).

Identyfikacja PV z użytecznością strumienia finansowego pozwala na rozważanie następujących warunków dodatkowych;

- pierwsze prawo Gossena:

$$\forall_{(t, C_1), (t, C_2) \in \Phi^+} \forall_{\alpha \in [0, 1]} : \alpha \cdot PV(t, C_1) + (1 - \alpha)PV(t, C_2) \leq PV(t, \alpha C_1 + (1 - \alpha)C_2), \quad (9)$$

- efekt dywersyfikacji:

$$\forall_{(t, C_1), (t, C_2) \in \Phi} : PV(t, C_1 + C_2) \leq PV(t, C_1) + PV(t, C_2). \quad (10)$$

Spełnienie pierwszego prawa Gossena jest warunkiem dostatecznym na to, aby ujawnił się efekt dywersyfikacji. W tej sytuacji założymy dodatkowo, że każda rozpatrywana PV spełnia warunek (9). Założenie to jest dobrze uzasadnione przez teorię i praktykę ekonomiczną. O inwestorze uwzględniającym warunek (9) mówimy, że może ujawnić awersję do ryzyka. Zasięg ujawniania się tej awersji jest jednak ograniczony, gdyż z warunku (1) otrzymujemy

$$\forall_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+} \forall_{\alpha \in [0, 1]} : \alpha \cdot PV(0, C_1) + (1 - \alpha)PV(0, C_2) = PV(0, \alpha C_1 + (1 - \alpha)C_2). \quad (11)$$

Zauważmy też, że zgodnie z (4) dla dowolnego $t \in \Theta$ każda funkcja $PV(t, \cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki (1), (2), (3) definicji Peccatiego ma ciągle pochodne cząstkowe

$$PV'_C = \frac{\partial PV}{\partial C} \quad \text{ i } \quad PV''_C = \frac{\partial^2 PV}{\partial C^2}. \quad (12)$$

Spostrzeżenie to wykorzystamy jako dodatkowy warunek nałożony na PV zdefiniowaną jako funkcja spełniająca warunki (1), (2), (6) i (7). Dodatkowo w dalszej części pracy nasze rozważania ograniczymy do przypadku $\Theta = \mathbb{R}_0^+$.

2. Wartość bieżąca a absolutny współczynnik awersji do ryzyka

Oceny awersji do ryzyka możemy dokonać za pomocą absolutnego współczynnika awersji do ryzyka $\alpha(\cdot)$ [Pratt 1964; Arrow 1971]. Będziemy tutaj rozważać przypadek, kiedy wartość tego współczynnika nie zależy od wartości nominalnej ocenianej płatności. W tej sytuacji współczynnik awersji do ryzyka będziemy przedstawiać jako funkcję terminu odroczenia płatności $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ określoną za pomocą tożsamości

$$\alpha(t) = -\frac{PV''_C(t, C)}{PV'_C(t, C)}. \quad (13)$$

Dzięki warunkowi (11) możemy zapisać

$$\alpha(0) = 0. \quad (14)$$

Ponadto możemy przypuszczać, że awersja do ryzyka narasta stopniowo wraz z opóźnianiem się terminu płatności. Formalnym odzwierciedleniem tego przypuszczenia jest przyjęcie założenia, że współczynnik awersji do ryzyka jest ciągłą funkcją rosnącą terminu odroczenia płatności.

Dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ dowolna całka równania różniczkowego (13) jest dana w postaci

$$PV(t, C) = \frac{-A}{\alpha(t)} e^{-\alpha(t)C} + B. \quad (15)$$

Łatwo jest wykazać, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^+$ opisana powyżej funkcja $PV: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek definicyjny (6). Ponadto dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^+$ funkcja ma prawostronną granicę właściwą w punkcie $C = 0$. Dzięki temu, stosując podstawienie

$$PV(t, 0) = \lim_{C \rightarrow 0^+} PV(t, C) = \frac{-A}{\alpha(t)} + B, \quad (16)$$

dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ możemy rozszerzyć do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Z drugiej strony bezpośrednio z (8) otrzymujemy

$$0 = PV(t, 0) = \frac{-A}{\alpha(t)} + B. \quad (17)$$

Dzięki temu mamy

$$PV(t, C) = \frac{A}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)C} \right). \quad (18)$$

Stosując elementarne metody rachunku różniczkowego można wykazać, że dla dowolnych $A, C \in \mathbb{R}^+$ wartość określonej przez (18) funkcji $PV(\cdot, C)$ spada wraz ze wzrostem wartości współczynnika awersji do ryzyka $\alpha(t)$. W tej sytuacji, kiedy współczynnik awersji do ryzyka jest rosnącą funkcją terminu odroczenia, funkcja $PV(\cdot, \cdot)$ spełnia warunek definicyjny (2). Dla dowolnego $C \in \mathbb{R}_0^+$, funkcja $PV(\cdot, C)$ ma prawostronną granicę właściwą w punkcie $t = 0$. Mamy tutaj

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} PV(t, C) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)C} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{A}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha C} \right) = A \cdot C \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{-\alpha C} = A \cdot C.$$

Dzięki temu, stosując podstawienie

$$PV(0, C) = \lim_{t \rightarrow 0^+} PV(t, C), \quad (19)$$

dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ możemy rozszerzyć do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Bezpośrednio z warunku (1) otrzymujemy wtedy

$$PV(t, C) = \frac{1}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)C} \right) = \frac{\text{sign}(C)}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)|C|} \right). \quad (20)$$

W ostatnim kroku dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ rozszerzamy do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Korzystamy tutaj z warunku definicyjnego (7). Dla dowolnej pary $(t, C) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^-$ mamy

$$PV(t, C) = -PV(t, -C) = \frac{-1}{\alpha(t)} \left(1 - e^{\alpha(t)C} \right) = \frac{\text{sign}(C)}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)|C|} \right). \quad (21)$$

Ostatecznie funkcję $PV : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$PV(t, C) = \frac{\text{sign}(C)}{\alpha(t)} \left(1 - e^{-\alpha(t)|C|} \right). \quad (22)$$

Pokazano już powyżej, że funkcja ta spełnia warunki definicyjne (1), (2) i (7) oraz dla dowolnej trójki $(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ warunek (6). Dzięki (8) i (22), dla dowolnej trójki $(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ mamy

$$PV(t, C_1) < 0 = PV(t, 0) < PV(t, C_2). \quad (23)$$

Wykazaliśmy, że warunek (6) jest spełniony także dla dowolnej trójki $(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}_0^+$. Do sprawdzenia pozostał przypadek dowolnej trójki $(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$. Dla $C_1 < C_2 < 0$ mamy

$$PV(t, C_1) = \frac{1}{\alpha(t)} \left(e^{\alpha(t)C_1} - 1 \right) < \frac{1}{\alpha(t)} \left(e^{\alpha(t)C_2} - 1 \right) = PV(t, C_2). \quad (24)$$

W rozdziale tym pokazano, że określona za pomocą (22) funkcja $PV(\cdot, \cdot)$ jest przykładem funkcji spełniającej warunki (1), (2), (6) i (7) aksjomatycznej definicji PV .

3. Wartość bieżąca – a względny współczynnik awersji do ryzyka

Inwestor uwzględniający warunek (9) może ujawnić awersję do ryzyka. W tym rozdziale będziemy dodatkowo zakładać, że tę awersję do ryzyka inwestor będzie ujawniał jedynie w środowisku wyższych wartości należności. Oznacza to istnienie wartości należności $C^* \in \mathbb{R}^+$ takiej, że:

- poniżej tej wartości inwestor będzie się wykazywać brakiem awersji do ryzyka,
- powyżej tej wartości inwestor będzie się wykazywać awersją do ryzyka.

Oceny awersji do ryzyka możemy też dokonać za pomocą względnego współczynnika $\beta: \mathbb{R}_0^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{C^*\}) \rightarrow [0; 1)$ awersji do ryzyka [de Finetti 1952] określonego za pomocą tożsamości

$$\hat{\beta}(t, C) = -C \cdot \frac{PV_C''(t, C)}{PV_C'(t, C)}. \quad (25)$$

Dzięki warunkowi (11) możemy zapisać

$$\hat{\beta}(0, C) = 0. \quad (26)$$

Z tych samych przyczyn co w poprzednim rozdziale przyjmujemy założenia, że w przypadku ujawnienia się awersji względny współczynnik awersji do ryzyka jest ciągłą funkcją rosnącą terminu odroczenia płatności. Zatem możemy zapisać

$$\hat{\beta}(t, C) = \begin{cases} 0, & C \in (0, C^*), \\ \beta(t), & C \in (C^*, +\infty), \end{cases} \quad (27)$$

gdzie $\beta: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0; 1)$ jest ciągłą funkcją rosnącą terminu odroczenia płatności.

Dla każdej pary $(t, C) \in \mathbb{R}_0^+ \times (0, C^*)$ równanie różniczkowe (25) przyjmuje postać

$$0 = -C \cdot \frac{PV_C''(t, C)}{PV_C'(t, C)}. \quad (28)$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}_0^+$ dowolna całka równania różniczkowego (28) jest dana w postaci

$$PV(t, C) = A(t) \cdot C + B(t). \quad (29)$$

Łatwo jest wykazać, że dla każdego $A(t) \in \mathbb{R}^+$ opisana powyżej funkcja $PV: \mathbb{R}_0^+ \times (0, C^*) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek definicyjny (6). Ponadto dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_0^+$ funkcja $PV(t, \cdot)$ ma prawostronną granicę właściwą w punkcie $C = 0$. Dzięki temu, stosując podstawienie

$$PV(t, 0) = \lim_{C \rightarrow 0^+} PV(t, C) = B(t), \quad (30)$$

dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ możemy rozszerzyć do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}_0^+ \times [0, C^*]$. Z drugiej strony, bezpośrednio z (8) otrzymujemy

$$0 = PV(t, 0) = B(t). \quad (31)$$

Dzięki temu mamy

$$PV(t, C) = A(t) \cdot C. \quad (32)$$

Z warunku (1) otrzymujemy tutaj

$$A(0) = 1. \quad (33)$$

Porównanie (32) z (2) i (33) dowodzi, że funkcja $A : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0; 1]$ jest malejąca. Zgodnie z (4) oznacza to, że

$$A(t) = v(t), \quad (34)$$

gdzie $v : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0; 1]$ jest dowolnym czynnikiem dyskontującym określającym funkcję spełniającą warunki (1), (2) i (3) definicji Peccatiego. W szczególnym przypadku taki czynnik dyskontujący może być jedną z funkcji zdyskontowanej użyteczności opisanych w [Doyle 2013].

Dzięki ciągłości funkcji PV dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ możemy rozszerzyć do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}_0^+ \times [0, C^*]$. Ostatecznie funkcja $PV : \mathbb{R}_0^+ \times [0, C^*] \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest za pomocą tożsamości

$$PV(t, C) = C \cdot v(t). \quad (35)$$

Dla każdej pary $(t, C) \in \mathbb{R}^+ \times (C^*, +\infty)$ równanie różniczkowe (25) przyjmuje postać

$$\beta(t) = -C \cdot \frac{PV_C''(t, C)}{PV_C'(t, C)}. \quad (36)$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ dowolna całka równania różniczkowego (36) jest dana w postaci

$$PV(t, C) = \frac{D(t)}{1 - \beta(t)} C^{1 - \beta(t)} + E(t). \quad (37)$$

Łatwo jest wykazać, że dla każdego $D(t) \in \mathbb{R}^+$ opisana powyżej funkcja $PV : \mathbb{R}^+ \times (C^*, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek definicyjny (6). Ponadto dla każdego $t \in \mathbb{R}^+$ warunek konieczny istnienia pochodnych cząstkowych (12) implikuje następujące zależności

$$C^* \cdot v(t) = \lim_{C \rightarrow (C^*)^-} PV(t, C) = \lim_{C \rightarrow (C^*)^+} PV(t, C) = \frac{D(t)}{1 - \beta(t)} \cdot (C^*)^{1 - \beta(t)} + E(t), \quad (38)$$

$$v(t) = \lim_{C \rightarrow (C^*)^-} PV'_C(t, C) = \lim_{C \rightarrow (C^*)^+} PV'_C(t, C) = D(t) \cdot (C^*)^{-\beta(t)}. \quad (39)$$

Koniunkcję warunków (38) i (39) traktujemy, jako układ równań z niewiadomymi $D(t)$ i $E(t)$. Układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie

$$D(t) = (C^*)^{\beta(t)} \cdot v(t), \quad (40)$$

$$E(t) = -C^* \cdot v(t) \cdot \frac{\beta(t)}{1 - \beta(t)}. \quad (41)$$

Dzięki temu mamy

$$PV(t, C) = C^* \cdot v(t) \cdot \frac{\left(\frac{C}{C^*}\right)^{1 - \beta(t)} - \beta(t)}{1 - \beta(t)}. \quad (42)$$

Bezpośrednio z (5), (26) i (42) otrzymujemy (1). Zatem funkcja określona za pomocą tożsamości (42) spełnia warunek definicyjny (1), co pozwala rozszerzyć dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ do produktu kartezjańskiego $\mathbb{R}_0^+ \times (C^*, +\infty)$. Stosując elementarne metody rachunku różniczkowego można wykazać, że wartość określonej przez (42) funkcji $PV(\cdot, C)$ spada wraz ze wzrostem wartości względnego współczynnika awersji do ryzyka $\beta(t)$. W tej sytuacji, kiedy względny współczynnik awersji do ryzyka jest rosnącą funkcją $PV(\cdot, \cdot)$ terminu odroczenia, funkcja spełnia warunek definicyjny (2).

Zestawiając razem (35) i (42) definiujemy funkcję $PV : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ daną za pomocą tożsamości

$$PV(t, C) = \begin{cases} C \cdot v(t), & C \in [0, C^*], \\ C^* \cdot v(t) \cdot \frac{\left(\frac{C}{C^*}\right)^{1-\beta(t)} - \beta(t)}{1-\beta(t)}, & C \in (C^*, +\infty), \end{cases} \quad (43)$$

Ostatecznie, stosując (7), rozszerzamy dziedzinę funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ do produktu kartezjańskiego $PV: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja jest wtedy określona za pomocą tożsamości

$$PV(t, C) = \begin{cases} C \cdot v(t), & C \in [-C^*, C^*], \\ C \cdot v(t) \cdot \frac{\left(\frac{C^*}{|C|}\right)^{\beta(t)} - \frac{C^*}{|C|} \cdot \beta(t)}{1-\beta(t)}, & C \in (-\infty, -C^*) \cup (C^*, +\infty). \end{cases} \quad (44)$$

W rozdziale tym pokazano, że określona za pomocą (44) funkcja $PV(\cdot, \cdot)$ jest przykładem funkcji spełniającej warunki (1), (2), (6) i (7) aksjomatycznej definicji PV.

Podsumowanie

Określone za pomocą (22) lub (44) funkcje $PV: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ nie są liniowymi funkcjami wartości płatności $C \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że funkcje te nie spełniają warunku (3) definicji Peccatiego. W ten sposób została wykazana istotność przedstawionego w [Piasecki 2012] uogólnienia aksjomatycznej definicji PV.

Każda z zaproponowanych powyżej funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ spełnia pierwsze prawo Gossena i nie jest funkcją addytywną wartości płatności. Przebieg zmienności każdej z tych funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ zależy jedynie od przebiegów zmienności współczynnika awersji do ryzyka i czynnika dyskontującego. Każda z tych charakterystyk stanowi element opisu środowiska ekonomicznego. W tej sytuacji można stwierdzić, że przebieg zmienności zaproponowanych tutaj $PV(\cdot, \cdot)$ jest w pełni uzasadniony przesłankami ekonomicznymi. Wszystko to pokazuje, że został osiągnięty główny cel badawczy tej pracy.

Każdy ze współczynników awersji opisuje behawioralne aspekty zarządzania finansami. Czynniki dyskontujące jest obrazem procesu aprecjacji kapitału. Przebieg procesu aprecjacji kapitału jest zależny od obiektywnych fundamentalnych właściwości rynku finansowego oraz może zależeć od rozmaitych behawioralnych czynników.

Przebieg zmienności funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ opisanej w punkcie 2 zależy jedynie od absolutnego współczynnika awersji do ryzyka. Oznacza to, że można wyznaczać PV, kierując się jedynie przesłankami behawioralnymi.

Przebieg zmienności funkcji $PV(\cdot, \cdot)$ opisanej w punkcie 3 zależy równocześnie od względnego współczynnika awersji do ryzyka oraz od zadanego czynnika dyskontującego. Oznacza to, że można wyznaczać PV, kierując się interakcją czynników behawioralnych i fundamentalnych.

Bibliografia

- Arrow, K.J., 1971, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, North-Holland, Amsterdam.
- Bleichrodt, H., Potter van Loon, R.J.D., Rohde, K.I.M., Wakker, P.P., 2013, *A Criticism of Doyle's Survey of Time Preference*, *Judgment and Decision Making*, 8(5), s. 630–631.
- Chrzan, P., 2001, *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*, Oikońomos, Katowice.
- Doyle, J.R., 2013, *Survey of Time Preference, Delay Discounting Model*, *Judgment and Decision Making*, vol. 8, no. 2, s. 116–135.
- de Finetti, B., 1952, *Sulla preferibilita*, *Giornale degli Economisti* 11, s. 685–709.
- Janssen, J., Manca, R., Volpe di Prignano, E., 2009, *Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models*, John Wiley & Sons, London.
- Peccati, L., 1972, *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.
- Piasecki, K., 2005, *Od arytmetyki handlowej do inżynierii finansowej*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Piasecki, K., 2007, *Modele matematyki finansowej. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Piasecki, K., Ronka-Chmielowiec, W., 2011, *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Piasecki, K., 2012, *Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory*, *Operations Research and Decisions* 22(3), s. 37–53.
- Pratt, J.W., 1964, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, *Econometrica* vol. 132, s. 122–136.